世代重複モデルでの公的年金政策の経済分析

An economic analysis of public pension policy in the overlapping generations model

久　保　和　華

高齢化の進展にともない、日本の社会保障制度は大きな変革期を迎えている。それに備えて社会保障制度の改革案が提出されているが、制度の改革に際して財源問題が大きな焦点となっている。本論文の目的は、2期の世代重複モデルを用いて高齢化が経済にどのような影響を与えるのかを、現行制度下に異なる財源徴収方法を適用して考察することである。

本論文の分析は、高齢化がマクロ経済に及ぼす影響を資本蓄積への影響によって検討し、また社会厚生を最大にする最適保険料と資本労働比率の流列を解析的に求め定常状態において比較静学分析を行うことである。

その結果、公的年金制度を賦課方式にのみ限定しても財源の徴収方法の差違によって経済へ与える効果は異なることを示し、社会厚生を最大にする政府の最適政策もどのような徴収方法を採用しているのかによって結論が異なることを示した。

キーワード：賦課方式公的年金、一括税式、比例所得税式、最適保険料

目　次

Ⅰ　はじめに

我が国の社会保障は、戦後、制度面において著しい発展を遂げてきた。そして今日、高齢者の

生活の基礎は社会保障によって支えられることになっている。それゆえ、我が国では、人口の高齢化が必然的に高齢者関係の社会保障ニーズを増大させるものと考えられる。高齢者のニーズは、年金による所得保障、医療保健サービス、老人福祉サービスに大別できるが、21世紀に入ってからの社会保障給付費の対国民所得費の大幅な上昇は主に年金によるものであることが予想されている。高齢者人口の増加にともなって公的年金の受給者数が増加することは、いうまでもないことである。厚生省の推計によれば、公的年金受給者数は1985年には1840万人であったが、2000年には約2700万人、2010年には約3300万人に達するとみられている。また、次第に年金加入期間が長く、フルペンションを受給する高齢者も増加することになる。したがって、人口高齢化の進展につれて年金給付額は著しく増加し、それに見合う財源も必要となってこよう。

Cutler et al.（1997）は中央集権体制では高齢化に対する最適政策は国民の貯蓄を下げ消費を増やし、もし高齢化が米国のように急激でなければ短期的には消費の増加がもたらされるが、日本のように高齢化が即座に起これば現在世代の暮らし向きは悪くなると主張し、中央政府が功利主義的社会厚生関数を最大にするラムゼイモデル成長論の結果を引き出した。しかしラムゼイモデルの欠点は無限に生きる個人を仮定しているので、高齢化の世代間再分配を考慮できないことである。そこでMeijdam and Verbon（1997）は合理的期待を伴った世代重複モデルの枠組みのなかで最適な賦課方式システムが高齢化にどう反応するかを考察しているが、功利主義的社会厚生関数に固執したため世代間の移転は明示的には賦課方式によってモデル化されることになった。またBovenberg et al.（1993）やAuerbach and Kotlikoff（1987）も数値的解析によって同様の分析を試みている。

最近の公的年金制度の理論では、賦課方式から積み立て方式へのパレート改善的な変換は可能かという問題もよく扱われているが、Breyer and Straub（1993）は既存の賦課方式から積み立て方式へのパレート改善的な変換は可能だという結論を同質的な個人をもつ世代重複モデルで導出したが、Brunner（1996）は保険料と所得の間に線形関係を仮定し、さらに異質の個人をもつ世代重複モデルを定式化している。

本稿では、高齢化が経済にどのような影響を与えるのかということを、二期間世代重複モデルを用いて考察する。第2節ではベンチマークとして公的年金制度が存在しない経済の資本蓄積を考察する。第3節では賦課方式公的年金制度を導入し保険料が一括税である経済を想定し高齢化社会における公的年金制度のマクロ経済的な効果を分析する。第4節では保険料が比例的所得税である経済において公的年金政策が資本蓄積に与える影響を明らかにする。第5節では各経済において社会的厚生を最大にする公的年金政策を考察する。

Ⅱ　公的年金が存在しない経済

離散的な時間を考え、各期において１種類のみの実物財が存在する。市場経済は個人と企業から構成される。個人は若年期と老年期の２期間生存する。ｔ期に生まれた個人（ｔ世代）はｔ期に若年期の消費 c_t^y を消費し、ｔ＋1期に老年期の消費 c_t^r を消費する。代表的個人の効用は若年期の消費からの効用と、老年期の消費からの効用に時間選好率 θ をかけたものの和である。ｔ期に生まれた個人の効用関数はKan and Sakagami（1997）の特定化を用いて、

$$u=\ln c_t^y+(1+\theta)^{-1}\ln c_t^r$$

とする。分離可能な効用関数 u（・）はinada条件を満たしている。個人は若年期にのみ働き非弾力的に労働１単位を供給し、実質賃金 w_t を稼ぐ。彼は、若年期の所得の一部を消費し、残りを老年期の消費のために貯蓄する。ｔ期に行われた貯蓄 s_t は資本ストック K_{t+1} を生み出し、ｔ＋1期の若年層によって供給される労働力 N_{t+1} と結びついてｔ＋1期の産出物 Y_{t+1} を生産する。

ｔ世代の人口は N_t であり、ｔ期の人口成長率 n_t は外生的に決定されるとする。つまり、$N_{t+1}=(1+n_{t+1})N_t$ である。

企業は競争的であり、規模に関して収穫一定の技術を用いて生産を行う $Y_t=F(K_t,N_t)$ とする。労働者一人当たりの生産 $\frac{Y_t}{N_t}$ は、標準的な新古典派生産関数 $y_t=f(k_t)$ と表現される。ここで、k_t は資本労働比率である。生産関数をコブダグラス型 $y_t=f(k_t)=Ak_t^{\alpha}$, $\alpha<1$ に特定化すると、inada条件を満たしている。代表的企業は、賃金率 w_t、レンタル率 r_t 所与の下で利潤最大化を行う。

今、分権的経済について考察を行うので、家計と企業の最適化問題を解き、市場均衡を導出することにする。まず、任意のｔ世代の代表的個人は、賃金率 w_t、レンタル率 r_{t+1} 所与の下で効用最大化を行う。つまり問題

$$\max_{s_t}\quad u=\ln c_t^y+(1+\theta)^{-1}\ln c_t^r \quad (1)$$

$$s.t.\quad c_t^y=w_t-s_t \quad (2)$$

$$c_t^r=(1+r_{t+1})s_t \quad (3)$$

を解く。一階の条件を求めると、

$$\frac{c_t^r}{c_t^y}=\frac{1+r_{t+1}}{1+\theta}$$

を得る。これに代表的個人の生涯の予算制約（2)、(3）を代入すると、

$$\frac{(1+r_{t+1})s_t}{w_t-s_t}=\frac{1+r_{t+1}}{1+\theta}$$

となり、整理すると、貯蓄関数

$$s_t=(2+\theta)^{-1}w_t \quad (4)$$

を得る。貯蓄関数 $s_t = s(w_t;\theta)$ は $0 < s_w < 1$ である。

次に企業は競争的に行動するので、利潤最大化の結果、

$$f(k_t)-k_t f'(k_t) = A(1-\alpha)k_t^{\alpha} = w_t \quad (5)$$

$$f'(k_t) = A\alpha k_t^{\alpha-1} = r_t \quad (6)$$

が要素市場均衡条件になる。

財市場の均衡では各期に財の需要と供給が等しくなる。つまり投資は貯蓄に等しい。

$$I_{t+1}-I_t = N_t s(w_t;\theta)-K_t$$

が成立する。純投資はｔ＋1期とｔ期の資本ストックの変化であることを考慮すると

$$K_{t+1} = N_t s(w_t;\theta)$$

となり、整理すると

$$k_{t+1}(1+n_{t+1}) = s(w_t;\theta)$$

を得る。資本蓄積方程式は

$$k_{t+1}(1+n_{t+1}) = \frac{w_t}{2+\theta} \quad (7)$$

となる。

資本蓄積方程式(7)は要素市場均衡条件(5)、(6)とともに資本ストックの動学的行動を意味する。(7)は

$$k_{t+1} = \frac{s(w_t;\theta)}{1+n_{t+1}} = \frac{s(f(k_t)-k_t f'(k_t);\theta)}{1+n_{t+1}} \quad (7)'$$

と表現できる。(7)'は k_{t+1} と k_t の関係を示し、貯蓄の軌跡を示す。

補題１　貯蓄の軌跡の性質

$$\frac{dk_{t+1}}{dk_t} = -\frac{A\alpha(\alpha-1)k_t^{\alpha-1}}{(1+n_{t+1})(2+\theta)} > 0^{*1},$$

$$if \quad k_t < \left\{\frac{(1+n_{t+1})(2+\theta)}{A\alpha(1-\alpha)}\right\}^{\frac{1}{\alpha-1}}, then \left|\frac{dk_{t+1}}{dk_t}\right| < 1$$

より、資本労働比率は定常状態に向かって収束する。

定常状態とは各期の資本労働比率が等しい状態 $(k_t = k_{t+1} = k)$ である。このとき各期の人口成長率も等しい状態になっている。補題1より定常解 k^* は局所的に安定している。定常状態における資本蓄積方程式は

$$k^*(1+n) = \frac{A(1-\alpha)k^{*\alpha}}{2+\theta}$$

となる。したがって定常状態での資本労働比率は

$$k^* = \left\{\frac{A(1-\alpha)}{(2+\theta)(1+n)}\right\}^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (8)$$

である。定常状態において比較静学を行うと $dk^*/dn < 0, dk^*/d\theta < 0$ を得る。

命題１　人口成長率、時間選好率が増加すると、定常状態における資本労働比率は減少する。

Ⅲ　一括税形態の保険料を採用する賦課方式公的年金制度が存在する経済

ここで、公的年金制度が導入されている経済を想定する。公的年金は賦課方式と積立方式に大別できる。前者はある期に若年期の世代が負担する年金の額を、その期に老年期の世代にそのままわして、老年世代の年金給付にあてる方式であり、世代間での所得移転が行われる。他方、後者は若年期に毎年ある額を積み立てて、年金の基金として市場で運用し、運用収益とともに将来、老年期になってから、年金基金を老後の生活のために使う方式である。ある世代のなかで早く死ぬ人と長生きする人との間で助け合いが行われるが、年金の収支は世代ごとに行われ世代間での所得の移転はない。我が国の年金制度は原則として積立方式であるが、実体は賦課方式に限りなく近く、「修正積立方式」と呼ばれている。本節では賦課方式公的年金制度を採用し、保険料が一括税として徴収される経済について考察する。

経済は個人、企業と政府から構成される。各期に２期間生きる多数の同質的個人が存在する。従って各期には２世代（若年世代と老年世代）が存在する。任意の t 期に生まれた個人は、若年期間に固定時間働いて賃金 w_t を得る。w_t のうち一部は政府から保険料を一括税 τ_t として強制的に徴収され老人世代へ所得移転される。残りは若年期の消費と老後のための貯蓄とに使われる。つまり、t 世代（t 期に生まれた個人）の若年期の消費は $c_t^y = w_t - \tau_t - s_t$ である。老年期には、若年期に行った貯蓄 s_t から得られる収益と政府から給付される移転支払い η_{t+1} とをすべて消費しつくす。t 世代の老年期（t +1期）の消費は $c_t^r = (1+r_{t+1})s_t + \eta_{t+1}$ である。

個人は利他的ではないと仮定する。t 世代の個人の生涯効用は分離可能な効用関数によって表される。個人の生涯効用関数を

$$u_t = \ln c_t^y + (1+\theta)^{-1} \ln c_t^r$$

と特定化する。効用関数はinada条件を満たしている。θ は時間選好率を示す。
代表的個人は、保険料 τ_t、利子率 r_{t+1}、時間選好率、賃金率、人口成長率所与のもとで、効用最大化を行うので、問題

$$\max_{s_t} u_t = \ln c_t^y + (1+\theta)^{-1} \ln c_t^r \quad (9)$$

$$s.t. \quad c_t^y = w_t - \tau_t - s_t \quad (10)$$

$$c_t^r = (1+r_{t+1})s_t + \eta_{t+1} \quad (11)$$

$$\eta_t = (1+n_t)\tau_t \quad (12)$$

を解く。

問題の一階条件から

$$\frac{1+r_{t+1}}{1+\theta}=\frac{c_t^r}{c_t^y} \quad (13)$$

を得て、制約条件(10)、(11)、(12)を代入して整理すると、貯蓄関数

$$s_t=\frac{1}{(2+\theta)(1+r_{t+1})}\left\{(1+r_{t+1})(w_t-\tau_t)-(1+\theta)(1+n_{t+1})\tau_{t+1}\right\} \quad (14)$$

を得る。貯蓄関数 $s_t=s(w_t,r_{t+1},n_{t+1};\theta,\tau_t,\tau_{t+1})$ の性質は

$$0<s_w<1, s_r>0, s_{\tau i}<0(i=t,t+1), s_{n_{t+1}}<0, s_\theta<0$$

となる。

補題2　貯蓄関数は、賃金所得および利子率の増加関数であり、今期及び次期の保険料、次期の人口成長率、時間選好率の減少関数である。

次に、代表的企業はｔ期に生産要素資本 K_t と労働力 N_t を規模に関して収穫一定の生産技術 $Y_t=F(K_t,N_t)$ を用いて生産する。したがってｔ期における労働者１人あたりの生産は標準的な新古典派生産関数 $y_t=f(k_t)$ で表される。k_t は資本労働比率を示す。労働供給は外生的に決定されるとする。企業は競争的であるとするので、生産要素市場の均衡条件は

$$f(k_t)-k_tf'(k_t)=A(1-\alpha)k_t^\alpha=w_t \quad (16)$$

$$f'(k_t)=A\alpha k_t^{\alpha-1}=r_t \quad (17)$$

となる。

閉鎖経済モデルの財市場の均衡では、事後的に投資と貯蓄が等しくなるので、均衡条件は

$$(1+n_{t+1})k_{t+1}=s(w_t,r_{t+1},n_{t+1},\theta,\tau_t,\tau_{t+1})$$

である。したがって資本蓄積方程式は

$$k_{t+1}=\frac{(1+A\alpha k_{t+1}^{\alpha-1})\left\{A(1-\alpha)k_t^\alpha-\tau_t\right\}-(1+\theta)(1+n_{t+1})\tau_{t+1}}{(1+n_{t+1})(2+\theta)(1+A\alpha k_{t+1}^{\alpha-1})} \quad (18)$$

となる。

補題3　蓄積方程式の性質*2

$$\frac{dk_{t+1}}{dk_t}=\frac{\alpha(1+A\alpha k_{t+1}^{\alpha-1})A(1-\alpha)k_t^{\alpha-1}}{(1+n_{t+1})(2+\theta)(1+A\alpha^2k_{t+1}^{\alpha-1})+A^2\alpha(1-\alpha)^2k_t^\alpha k_{t+1}^{\alpha-2}-\tau_tA\alpha(1-\alpha)k_{t+1}^{\alpha-2}},$$

$$if\ \tau_t<A(1-\alpha)k_t^\alpha+\frac{\alpha(1+n_{t+1})(2+\theta)k_t}{1-\alpha}+\frac{(1+n_{t+1})(2+\theta)}{A\alpha(1-\alpha)k_{t+1}^{\alpha-2}}, then\frac{dk_{t+1}}{dk_t}>0,$$

$$if\ \tau_t<A(1-\alpha)k_t^\alpha+\frac{\alpha(1+n_{t+1})(2+\theta)k_t}{1-\alpha}+\frac{(1+n_{t+1})(2+\theta)}{A\alpha(1-\alpha)k_{t+1}^{\alpha-2}},$$

$$\tau_t < A(1-\alpha)k_t^{\alpha} - \alpha A k_{t+1} k_t^{\alpha-1} - \left(\frac{k_t}{k_{t+1}}\right)^{\alpha-2},\ then\left|\frac{dk_{t+1}}{dk_t}\right| < 1$$

より、資本労働比率は定常状態に向かって収束する。

分権的経済では各経済主体が最適化を行っており、条件⒁、⒃、⒄、⒅は満たされている。定常状態では資本蓄積方程式は

$$Ak^{\alpha}\left\{1-\alpha-\alpha(1+n)(2+\theta)\right\} - k(1+n)(2+\theta) + A^2\alpha(1-\alpha)k^{2\alpha-1} - A\alpha k^{\alpha-1}\tau$$
$$= \left\{1+(1+\theta)(1+n)\right\}\tau \quad (19)$$

となる。定常状態において比較静学を行うと、

$$if\ \tau > \frac{(\alpha^2 A k^{\alpha-1}+1)(1+n)(2+\theta)}{(1-\alpha)A\alpha k^{\alpha-2}} - A(2\alpha-1)k^{\alpha} - k,$$

$$then\frac{dk^*}{d\tau} > 0, \frac{dk^*}{dn} > 0, \frac{dk^*}{d\theta} > 0^{*3}$$

を得る。

命題２　保険料が上昇すれば、定常状態における資本労働比率は増加する。人口成長率及び時間選好率が増加すれば、定常状態における資本労働比率は増加する。但しこれらの十分条件は保険料がある値を超える範囲に存在することである。

Ⅳ　比例的所得税形態の保険料を採用する賦課方式公的年金制度が存在する経済

本節でも賦課方式公的年金制度が存在する経済を想定しているが、Ⅲ節と異なる設定は保険料が比例的所得税の形で徴収される点である。

任意のｔ期に生まれた個人は、若年期間に固定時間働いて賃金 w_t を得る。w_t のうち一部は政府から保険料として比例的所得税 $\tau_t w_t$ を強制的に徴収され、老人世代へ所得移転される。ｔ世代の若年期の消費は $c_t^y = (1-\tau_t)w_t - s_t$ である。老年期には、若年期に行った貯蓄 s_t から得られる収益と政府から給付される移転支払い η_{t+1} とをすべて消費しつくすので、ｔ世代の老年期の消費は $c_t^r = (1+r_{t+1})s_t + \eta_{t+1}$ である。

個人は利他的ではないと仮定する。ｔ世代の個人の生涯効用関数を

$$u_t = \ln c_t^y + (1+\theta)^{-1}\ln c_t^r$$

と特定化する。これはinada条件を満たしている。θ は時間選好率を表す。

代表的個人は、保険料率 τ_t、利子率 r_{t+1}、時間選好率、賃金率、人口成長率所与のもとで、効用最大化を行う。つまり、個人は問題

$$\max_{s_t} u_t = \ln c_t^y + (1+\theta)^{-1}\ln c_t^r \quad (20)$$

$$s.t.c_t^y = (1-\tau_t)w_t - s_t \quad (21)$$
$$c_t^r = (1+r_{t+1})s_t + \eta_{t+1} \quad (22)$$
$$\eta_{t+1} = (1+n_{t+1})\tau_{t+1}w_{t+1} \quad (23)$$

を解く。
問題の一階条件から

$$\frac{1+r_{t+1}}{1+\theta} = \frac{c_t^r}{c_t^y} \quad (24)$$

を得る。整理して、貯蓄関数

$$s_t = \frac{1}{(2+\theta)(1+r_{t+1})}\left\{(1+r_{t+1})(1-\tau_t)w_t - (1+\theta)(1+n_{t+1})\tau_{t+1}w_{t+1}\right\} \quad (25)$$

を得る。貯蓄関数 $s_t = s(w_t, w_{t+1}, r_{t+1}, n_{t+1}; \theta, \tau_t, \tau_{t+1})$ の性質は

$$0 < s_{w_t} < 1, s_{w_{t+1}} < 0, s_r > 0, s_{\tau i} < 0(i = t, t+1), s_{n_{t+1}} < 0, s_\theta < 0$$

である。

補題4　貯蓄関数は、利子率及び今期の賃金所得の増加関数であり、次期の賃金所得、今期及び次期の保険料、次期の人口成長率、時間選好率の減少関数である。

次に、代表的企業は競争的であるとするので利潤最大化より、生産要素市場の均衡条件は

$$f(k_t) - k_t f'(k_t) = A(1-\alpha)k_t^\alpha = w_t \quad (26)$$
$$f'(k_t) = A\alpha k_t^{\alpha-1} = r_t \quad (27)$$

となる。
財市場の均衡条件は

$$(1+n_{t+1})k_{t+1} = s_t$$

である。資本蓄積方程式は

$$k_{t+1} = \frac{(1+A\alpha k_{t+1}^{\alpha-1})(1-\tau_t)A(1-\alpha)k_t^\alpha - (1+\theta)(1+n_{t+1})\tau_{t+1}A(1-\alpha)k_{t+1}^\alpha}{(1+n_{t+1})(2+\theta)(1+A\alpha k_{t+1}^{\alpha-1})} \quad (28)$$

となる。

補題5　資本労働比率は局所的に安定である。以下の証明

$$\frac{dk_{t+1}}{dk_t}$$
$$= \frac{(1+A\alpha k_{t+1}^{\alpha-1})(1-\tau_t)A(1-\alpha)\alpha k_t^{\alpha-1}}{(1+n_{t+1})(2+\theta)(1+A\alpha^2 k_{t+1}^{\alpha-1}) + A^2(1-\alpha)^2\alpha(1-\tau_t)k_{t+1}^{\alpha-2}k_t^\alpha + (1+\theta)(1+n_{t+1})\tau_{t+1}A(1-\alpha)\alpha k_{t+1}^{\alpha-1}}$$

$$\frac{dk_{t+1}}{dk_t} > 0,$$

$$if\ k_t > \frac{1}{A(1-\alpha)k_{t+1}^{\alpha-2}} + \frac{\alpha k_{t+1}}{1-\alpha}, then \frac{dk_{t+1}}{dk_t} < 1$$

より得られる。

定常状態における資本蓄積方程式は(28)より

$$A^2\alpha(1-\tau)(1-\alpha)k^{*2\alpha-1} + Ak^{*\alpha}\left\{(1-\tau)(1-\alpha)-(1+n)(2+\theta)\alpha-(1+\theta)(1+n)(1-\alpha)\tau\right\}$$
$$-(1+n)(2+\theta)k^* = 0 \quad (29)$$

となる。定常状態において資本蓄積方程式の比較静学を行うと、

$$if\ A\left\{(1-\tau)(1-\alpha)-(1+n)(1+\theta)(1-\alpha)\tau-(1+n)(2+\theta)\alpha\right\}\alpha k^{*\alpha-1}$$
$$+A^2\alpha(1-\alpha)(1-\tau)(2\alpha-1)k^{*2\alpha-2}-(1+n)(2+\theta) < 0,$$
$$then \frac{dk^*}{d\tau} < 0, \frac{dk^*}{d\theta} < 0, \frac{dk^*}{dn} < 0,$$

を得る。

命題３　比例的所得税式の保険料を採用する経済では一括税式の経済と異なり、保険料率、時間選好率、人口成長率の増加と共に定常状態における資本労働比率は減少する。

Ⅴ　厚生分析

本節では、各経済において政府が功利主義的社会厚生関数を最大にする資本労働比率と保険料の流列を決定する問題を考察し、定常状態において比較静学を行う。

政府はすべての現世代と将来世代の厚生を考慮する社会計画者であるとする。ｔ期の政府は社会的割引率ρをともなう功利主義的社会厚生関数を最大化すると仮定する。一世代の厚生は世代の人口によってウェイトづけられた代表的個人の効用の現在価値によって測られる。そこで功利主義的社会厚生関数を

$$W_t = \sum_{i=t}^{\infty} u_{i-1} \prod_{j=t}^{i} \frac{1+n_{j-1}}{1+\rho} \quad (30)$$

とおいて分析を行う。

Ⅴ．1　公的年金が存在しない経済の厚生分析

政府は毎期資源制約(31)を満たしながら功利主義的厚生関数を最大にするように資本労働比率の流列を決定する。その際、代表的個人の生涯効用は若年期の消費からの効用と、老年期の消費からの効用を時間選好率で割り引いたものとの和によって表される。厚生関数は、代表的個人の効用をｔ－2期の人口に対する人口比によってウェイトづけ社会的割引率で割り引いた現在価値を

t－1期以降について加算しているものとする。

各期の代表的個人は生涯の予算制約を満たし、各期の代表的企業は標準的な新古典派生産関数のもとで生産を行っているとする。したがって政府は問題

$$\max_{\{(k_i),i\geq t\}} W_t = \sum_{i=t}^{\infty} u_{i-1} \prod_{j=t}^{i} \frac{1+n_{j-1}}{1+\rho}$$

$$\begin{aligned} s.t.\quad c_t^y &= w_t - s_t \\ c_t^r &= (1+r_{t+1})s_t \\ f(k_t)+k_t &= (1+n_{t+1})k_{t+1}+c_t^y+(1+n_t)^{-1}c_t^r \qquad (31) \\ f(k_t) &= Ak_t^{\alpha} \end{aligned}$$

を解く。一階の条件は

$$-\frac{1}{c_{t-1}^y}+\frac{(1+r_t)}{(1+\theta)c_{t-1}^r}+\frac{\{f'(k_t)-r_t\}}{(1+\rho)c_t^y}=0 \qquad (32)^{*4}$$

である。

もし経済の分権的達成がなされていないならば一階の条件は(32)である。

もし分権的達成がなされているならば、要素市場条件が満たされるので、$f'(k_t)=r_t$ が成立し、一階の条件は

$$\frac{1+r_t}{1+\theta}=\frac{c_{t-1}^r}{c_{t-1}^y} \qquad (32)'$$

となる。定常状態では資本蓄積方程式は

$$k^{\alpha-1}=\frac{(2+\theta)(1+\theta)(1+n)}{A(1-\alpha)} \qquad (33)$$

である。(33)は分権的配分(8)と等しくなる。(33)を使って、定常状態における最適資本労働比率について比較静学をすると、

$$\frac{dk}{d\theta}<0, \frac{dk}{dn}<0, \frac{dk}{d\alpha}>0, \frac{dk}{dA}>0$$

を得る。

命題4　分権的経済に政府が介入して最適な資本労働比率を選択する場合も、定常状態における最適資本労働比率 k は、市場経済における資本労働比率 k^* と等しくなる。定常状態での最適資本労働比率は、時間選好率、人口成長率の増加によって低下する。

V.2　一括税式保険料と経済厚生

本節では、V.1節の経済を一括税式保険料による徴収を行う賦課方式公的年金制度をもつ経済に変更した場合について考察を行う。政府は各期の代表的個人の予算制約、各期の資源配分制約を

満たしながら、社会厚生最大化問題を解く。したがって政府は

$$\max_{\{(k_i,\tau_i),i\geq t\}} W_t=\sum_{i=t}^{\infty}u_{i-1}\prod_{j=t}^{i}\frac{1+n_{j-1}}{1+\rho}$$

$$\begin{aligned} s.t.\quad & c_t^y=w_t-\tau_t-s_t \\ & c_t^r=(1+r_{t+1})s_t+\eta_{t+1} \\ & \eta_t=(1+n_t)\tau_t \\ & f(k_t)+k_t=(1+n_{t+1})k_{t+1}+c_t^y+(1+n_t)^{-1}c_t^r \\ & f(k_t)=Ak_t^{\alpha} \end{aligned} \qquad (31)$$

を解く。一階の条件は

$$-\frac{1+n_t}{c_{t-1}^y}+\frac{(1+r_t)(1+n_t)}{(1+\theta)c_{t-1}^r}+\frac{(1+n_t)\{f'(k_t)-r_t\}}{(1+\rho)c_t^y}=0,$$

$$\frac{c_t^y}{c_{t-1}^r}=\frac{1+\theta}{1+\rho}$$

となる。もし分権的達成がなされているならば、要素市場条件が満たされるので、一階の条件は

$$\frac{1+r_t}{1+\theta}=\frac{c_{t-1}^r}{c_{t-1}^y},\quad \frac{1+\theta}{1+\rho}=\frac{c_{t-1}^r}{c_{t-1}^y}$$

となる。これに制約条件を代入して整理すると、

$$k_t=\frac{w_{t-1}-\tau_{t-1}}{(2+\theta)(1+n_t)}-\frac{(1+\theta)\tau_t}{(2+\theta)(1+r_t)} \qquad (34)$$

$$\tau_t=\frac{(1+\rho)\left\{w_t-(1+n_{t+1})k_{t+1}\right\}-(1+\theta)(1+r_t)(1+n_t)k_t}{(1+\rho)+(1+\theta)(1+n_t)} \qquad (35)$$

となる。

したがって(34)、(35)を満たす流列 (τ_t,k_t) が最適保険料、最適資本労働比率となる。定常状態の定義より各期の利子率が等しく、また各期の賃金所得も等しくなる。

したがって定常状態での最適な保険料と資本労働比率は

$$(2+\theta)(1+n)k+A\left\{(2+\theta)(1+n)\alpha-1+\alpha\right\}k^{\alpha}-A^2\alpha(1-\alpha)k^{2\alpha-1}$$
$$+\left\{1+A\alpha k^{\alpha-1}+(1+n)(1+\theta)\right\}\tau=0,$$

$$(2+\theta+\rho)(1+n)k+\left\{(1+\theta)(1+r)\alpha-(1+\rho)(1-\alpha)\right\}Ak^{\alpha}+\left\{1+\rho+(1+\theta)(1+n)\right\}\tau=0$$

を満たす。定常状態において比較静学を行うと、

$$if\,\rho<(1+\theta)^{-1},\frac{\tau}{k}<(1-2\alpha)Ak^{\alpha-1},\frac{1-\alpha}{\alpha}<n<\frac{(1-\alpha)(1+\rho)}{\alpha(1+\theta)}-1,\frac{\tau}{k}<n<\frac{\tau-\rho}{k}+A\alpha k^{\alpha-1},$$

$$then\frac{\partial k}{\partial n}>0^{*5},$$

$$if\,\tau<(1-2\alpha)Ak^{\alpha},\ \frac{1}{\alpha}-1<n<\frac{(1-\alpha)(1+\rho)}{\alpha(1+\theta)}-1,\ \rho<(1+\theta)^{-1},$$

$$1 < k^{2-\alpha} < \frac{2+\rho+\theta}{(1+\rho)(2+\theta)}+1+n, \quad \frac{A\alpha(1-2\alpha)(1+\theta)}{\alpha(3+\theta)-(2+\rho+\theta)} < k^{1-\alpha},$$

$$\frac{(1-\alpha)\alpha A^2(1+\theta)(1-3\alpha)}{\alpha^2 A(1+\theta)(\rho-n)-\alpha A(1+\rho)(\alpha+\theta)} < k^{1-\alpha},$$

$$then \frac{\partial\tau}{\partial n} > 0^{*6}$$

命題５　人口成長率が増加すると、定常状態における最適資本労働比率と最適保険料は十分条件の下で増加する。

Ｖ．３比例的所得税式保険料と経済厚生

本節では、Ｖ.2節の一括税式保険料徴収を比例所得税式保険料徴収に修正したモデルにおいて分析を行う。政府は、個人の生涯の予算制約と資源制約を毎期満たしながら社会厚生を最大にする各期の資本労働比率と保険料率の流列を決定する。したがって問題

$$\max_{\{(k_i,\tau_i),i\geq t\}} W_t = \sum_{i=t}^{\infty} u_{i-1} \prod_{j=t}^{i} \frac{1+n_{j-1}}{1+\rho}$$

$$\begin{aligned} s.t.\quad & c_t^y = (1-\tau_t)w_t - s_t \\ & c_t^r = (1+r_{t+1})s_t + \eta_{t+1} \\ & \eta_{t+1} = (1+n_{t+1})\tau_{t+1}w_{t+1} \\ & f(k_t)+k_t = (1+n_{t+1})k_{t+1}+c_t^y+(1+n_t)^{-1}c_t^r \qquad (31) \\ & f(k_t) = Ak_t^\alpha \end{aligned}$$

を解く。一階の条件は

$$-\frac{1+n_t}{c_{t-1}^y}+\frac{(1+r_t)(1+n_t)}{(1+\theta)c_{t-1}^r}+\frac{(1+n_t)\{f'(k_t)-r_t\}}{(1+\rho)c_t^y} = 0,$$

$$\frac{c_t^y}{c_{t-1}^r} = \frac{1+\theta}{1+\rho}$$

となる。これは分権的達成がなされていれば、要素市場条件が成立していることから

$$\frac{1+r_t}{1+\theta} = \frac{c_{t-1}^r}{c_{t-1}^y}, \quad \frac{c_t^y}{c_{t-1}^r} = \frac{1+\theta}{1+\rho}$$

となる。したがって最適保険料、最適資本労働比率の流列は

$$k_t = \frac{(1-\tau_{t-1})w_{t-1}}{(2+\theta)(1+n_t)} - \frac{(1+\theta)\tau_t w_t}{(2+\theta)(1+r_t)} \qquad (36)$$

$$\tau_t = \frac{(1+\rho)\left\{w_t-(1+n_{t+1})k_{t+1}\right\}-(1+\theta)(1+r_t)(1+n_t)k_t}{\left\{(1+\theta)(1+n_t)+1+\rho\right\}w_t} \qquad (37)$$

を満たす。

定常状態での最適保険料、資本労働比率は

$$(2+\theta)(1+n)k+Ak^{\alpha}\Big\{(2+\theta)(1+n)\alpha+1-\alpha\Big\}+A^2(1-\alpha)\alpha k^{2\alpha-1}$$
$$+A(1-\alpha)k^{\alpha-1}\tau\Big\{1+(1+\theta)(1+n)\Big\}+A^2(1-\alpha)\alpha k^{2\alpha-1}\tau=0,$$

$$(1+n)(2+\rho+\theta)k+Ak^{\alpha}\Big[\tau(1-\alpha)\Big\{(1+\theta)(1+n)+1+\rho\Big\}-(1-\alpha)(1+\rho)+\alpha(1+n)(1+\theta)\Big]=0$$

を満たす。定常状態において比較静学を行うと、十分条件の下で

$$\frac{\partial k}{\partial n}\gtrless 0,\frac{d\tau}{dn}<0^{*7}$$

を得る。

命題6　十分条件が満たされているならば人口成長率の増加に対して、定常状態での最適資本労働比率は $|J_k|$ が正（負）値の時増加（減少）し、最適保険料率は減少する。

Ⅵ　おわりに

本稿では、年金制度が存在しない社会と賦課方式公的年金制度が存在する社会において高齢化がマクロ経済に及ぼす影響を資本蓄積への影響によって考察し、社会厚生を最大にする最適な保険料と資本労働比率の流列を解析的に求め定常状態において比較静学分析を行った。

人口成長率の低下を高齢化社会の進展とみなして考察を加えることにする。まず、分権的経済が達成されている場合、一括税形態の保険料を課す経済体制を除いて、高齢化の進展によって定常状態での資本労働比率が増加することが、Ⅱ・Ⅲ・Ⅳ節から得られた。賦課方式公的年金制度に限定しても、保険料の徴収方法の違いによって高齢化が進むことに対する個人の貯蓄行動が影響を受けることが明らかになった。人々は比例的所得税方式で保険料が徴収される場合、老後の所得保障がなされていようとも高齢化社会の進行に対して、貯蓄を増やすと考えられる。

また一括税式徴収下では保険料の上昇は定常状態での資本労働比率を増加させ、他方比例所得税式徴収下では減少させるという結果が得られた。比例的所得税方式徴収の公的年金制度によって老後の生活が保障されている社会では、保険料の上昇によって個人の予備的貯蓄（病気や災害）を含めたライフサイクル貯蓄の動機が薄れるといえよう。

さらに一括税式徴収を採用する経済を除けば、時間選好率が上昇すれば資本労働比率が減少するという結果が得られモデルが正常に機能していると判断できる。

次に、政府が社会厚生を最大にするように決定した資本労働比率と保険料の流列を定常状態において比較静学分析を行った結果、高齢化が定常状態における最適保険料に与える効果は、一括税式と比例的所得税式の経済では逆であることも明らかになった。高齢化の進展に対して、政府は一括税方式の経済下では定常状態での最適資本労働比率を減少させ、定常状態での最適保険料

を引き下げる政策をとる。一方、比例的所得税方式の経済では最適保険料率を引き上げ、最適資本労働比率をある条件下では減少させる政策をとるという結論を得た。現在、年金受給者の増加、年金受給期間の延長、インフレの存在を背景に、保険料の引き上げが年金審議会等でも検討が繰り返されているが、モデル分析では比例所得税方式徴収の場合においてのみ、高齢化社会の進行に対して保険料を引き上げることが政府の最適な政策であることが明らかになった。

最後に、本稿で分析できなかった次の問題を今後の課題としたい。第一にKan and Sakagami (1997) を用いて特定化した個人の生涯効用関数を、Barro (1995) によるものに修正し、さらに比例所得税式保険料を徴収方法とした賦課方式公的年金制度の経済モデルの中に労働供給を内生化させて分析することである。第二に合理的期待をいれたモデルを用いて賦課方式公的年金制度が高齢化によって受ける影響をより明確に検討することである。第三に今後の公的年金制度の安定性と信頼性を大きく作用する要素の一つと考えられる保険料の徴収の確実性について分析を広げていくことである。

参考文献

1)Auerbach,A.J. and Kotlikoff,L.J. (1997), Dynamic Fiscal Policy, Cambridge University Press.

2)Bardas,G.(1997), "Tax Policy in an Overlapping Generations Dynamic General Equilibrium Model",mimeo

3)Barro,J.R. and Sala-i-Martin,X.(1995),Economic Growth,McGraw-Hill

4)Blanchard,O.J. and Fischer,S. (1989), Lectures on Macroeconomics, MIT Press

5)Bovenberg,A.L.,Broer,D.P., and Westerhout, E.W.M.T. (1993), "Public Pensions and Declining Fertility in a Small Open Economy:an Intertemporal Equilibrium Approach", Public Finance, 48,43-59

6)Breyer,F. and Straub, M.(1993), "Welfare effects on unfunded pension system when labor supply is endogenous",Journal of Public Economics,50,79-91

7)Brunner,J.K.(1996),"Transition from a pay-as-you-go to a fully funded pension system :the case of differing individuals and intragenerational fairness", Journal of Public Economics ,60,131-146

8)Cutler, D.M., Poterba,J.M.,Sheiner, L.M. ,and Summers, L.H.(1990), "An Aging Society:Opportunity or Challenge?",Brookings Papers on Economic Activity, 1990:1,1-56

9)井堀利宏 (1996),『公共経済の理論』, 有斐閣

10)石川経夫 (1994),『日本の所得と富の分配』, 東京大学出版会

11)姜文源, 坂上智哉 (1997),「人口, 人的資本, および家族内配分における社会的規範」, mimeo

12)経済企画庁編 (1997),『経済白書』
13)厚生省編 (1996),『厚生白書』
14)厚生省編 (1997),『厚生白書』
15)工藤恒夫 (1997),「社会保障財政のあり方」, 賃金と社会保障, 1200,40-45
16)Meijdam,L.andVerbon,H.A.A. (1997), "Aging and Public Pensions in an Overlapping-Generations Model",Oxford Economic Papers, 49,29-42
17)中島克己, 林忠吉編 (1995),『日本の高齢化を考える』, ミネルヴァ書房
18)塩澤修平 (1997),「高齢化社会と年金保険システム」, 三田学會雑誌, 89:4,30-43
19)庄司博一 (1997),「年金はどうなるかからどうするへ」, 賃金と社会保障, 1203・04,4-17
20)田畑康人 (1996),「貯蓄と年金」, 年金と雇用, 15:2,19-34

注

＊1) 資本蓄積方程式は

$$k_{t+1}=\frac{A(1-\alpha)k_t^{\alpha}}{(2+\theta)(1+n_{t+1})}$$

なので、

$$\frac{dk_{t+1}}{dk_t}=\frac{A(1-\alpha)\alpha k_t^{\alpha-1}}{(2+\theta)(1+n_{t+1})}$$

を得る。

＊2) 資本蓄積方程式(18)に陰関数定理を用いる。そこで、

$$\Psi=(1+n_{t+1})(2+\theta)(1+A\alpha k_{t+1}^{\alpha-1})k_{t+1}-(1+A\alpha k_{t+1}^{\alpha-1})\left\{A(1-\alpha)k_t^{\alpha}-\tau_t\right\}+(1+n_{t+1})(1+\theta)\tau_{t+1}$$

とおく。まず、

$$\frac{dk_{t+1}}{dk_t}=-\frac{\dfrac{\partial\Psi}{\partial k_t}}{\dfrac{\partial\Psi}{\partial k_{t+1}}}$$

を求める。

$$\frac{\partial\Psi}{\partial k_t}=-\alpha(1+A\alpha k_{t+1}^{\alpha-1})A(1-\alpha)k_t^{\alpha-1},$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial k_{t+1}}=(1+n_{t+1})(2+\theta)(1+A\alpha^2k_{t+1}^{\alpha-1})+A^2\alpha(1-\alpha)^2k_t^{\alpha}k_{t+1}^{\alpha-2}-\tau_tA\alpha(1-\alpha)k_{t+1}^{\alpha-2}$$

となるので、十分条件

$$\frac{(1+n_{t+1})(2+\theta)}{A\alpha(1-\alpha)k_{t+1}^{\alpha-2}}+\frac{(1+n_{t+1})(2+\theta)\alpha k_t}{1-\alpha}+A(1-\alpha)k_t^{\alpha}>\tau_t$$

の下で、$\dfrac{\partial\Psi}{\partial k_{t+1}} > 0$となり、$\dfrac{dk_{t+1}}{dk_t} > 0$が導出される。

次に、$\left|\dfrac{dk_{t+1}}{dk_t}\right| < 1$かどうかを調べる。そこで、

$$1-\frac{dk_{t+1}}{dk_t}$$

$$=1-\frac{\alpha(1+A\alpha k_{t+1}^{\alpha-1})A(1-\alpha)k_t^{\alpha-1}}{(1+n_{t+1})(2+\theta)(1+A\alpha^2k_{t+1}^{\alpha-1})+A^2\alpha(1-\alpha)^2k_t^{\alpha}-\tau_tA\alpha(1-\alpha)k_{t+1}^{\alpha-2}}$$

の符号を調べると、分母は上述の十分条件より正である。

$$(1+n_{t+1})(2+\theta)(1+A\alpha^2k_{t+1}^{\alpha-1})+A^2\alpha(1-\alpha)^2k_t^{\alpha}-\tau_tA\alpha(1-\alpha)k_{t+1}^{\alpha-2}$$
$$-\alpha(1+A\alpha k_{t+1}^{\alpha-1})A(1-\alpha)k_t^{\alpha-1}=(1+n_{t+1})(2+\theta)(1+A\alpha^2k_{t+1}^{\alpha-1})$$
$$+A\alpha(1-\alpha)\left[\left\{(1-\alpha)k_t-\alpha k_{t+1}\right\}Ak_{t+1}^{\alpha-2}k_t^{\alpha-1}-k_{t+1}^{\alpha-2}\tau_t-k_t^{\alpha-2}\right]$$

より、十分条件

$$\frac{(1+n_{t+1})(2+\theta)}{A\alpha(1-\alpha)k_{t+1}^{\alpha-2}}+\frac{(1+n_{t+1})(2+\theta)\alpha k_t}{1-\alpha}+A(1-\alpha)k_t^{\alpha}>\tau_t$$

かつ

$$\tau_t<(1-\alpha)Ak_t^{\alpha}-\alpha Ak_{t+1}k_t^{\alpha-1}-\left(\frac{k_t}{k_{t+1}}\right)^{\alpha-2}$$

の下で、$\left|\dfrac{dk_{t+1}}{dk_t}\right| < 1$が満たされる。

＊3）比較静学を行うために式(19)より、

$$\phi=\left\{(1-\alpha)-\alpha(1+n)(2+\theta)\right\}Ak^{\alpha}-(1+n)(2+\theta)k+A^2\alpha(1-\alpha)k^{2\alpha-1}$$
$$-A\alpha k^{\alpha-1}\tau-\left\{1+(1+n)(1+\theta)\right\}\tau$$

とおく。

$$\frac{dk}{d\tau}=-\frac{\dfrac{\partial\phi}{\partial\tau}}{\dfrac{\partial\phi}{\partial k}}$$

の符号を調べる。

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tau}=-A\alpha k^{\alpha-1}-\left\{1+(1+n)(1+\theta)\right\}<0,$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial k}=(1-\alpha)A\alpha k^{\alpha-1}-(2+\theta)(1+A\alpha^2k^{\alpha-1})(1+n)+A^2\alpha(1-\alpha)(2\alpha-1)k^{2\alpha-2}$$
$$+A\alpha\tau(1-\alpha)k^{\alpha-2}$$

となる。十分条件

$$\tau > \frac{(\alpha^2 A k^{\alpha-1}+1)(1+n)(2+\theta)}{(1-\alpha)A\alpha k^{\alpha-2}} - A(2\alpha-1)k^{\alpha} - k$$

が満たされれば、$\dfrac{\partial\phi}{\partial k} > 0$となり、$\dfrac{dk}{d\tau} > 0$が導出される。

同様にして、$\dfrac{dk}{dn}, \dfrac{dk}{d\theta}$の符号を調べる。

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = -\alpha(2+\theta)Ak^{\alpha} - (2+\theta)k - (1+\theta)\tau < 0,$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -\alpha(1+n)Ak^{\alpha} - (1+n)k - (1+n)\tau < 0$$

より、上述の十分条件の下で、$\dfrac{dk}{dn} > 0, \dfrac{dk}{d\theta} > 0$が得られる。

＊4）社会厚生関数は

$$W_t = \left[\ln\left\{w_{t-1} - (1+n_t)k_t\right\} + (1+\theta)^{-1}\ln\left\{(1+r_t)(1+n_t)k_t\right\}\right]\frac{1+n_{t-1}}{1+\rho}$$
$$+\left[\ln\left\{f(k_t) + k_t - (1+n_{t+1})k_{t+1} - (1+r_t)k_t\right\} + (1+\theta)^{-1}\ln c_t^r\right]\frac{(1+n_{t-1})(1+n_t)}{(1+\rho)^2}$$
$$+\cdots$$

と表せる。そこで一階の条件は

$$\frac{\partial W_t}{\partial k_t} = \left\{-\frac{1+n_t}{c_{t-1}^y} + \frac{(1+r_t)(1+n_t)}{(1+\theta)c_{t-1}^r}\right\}\frac{1+n_{t-1}}{1+\rho} + \frac{1}{c_t^y}\left\{A\alpha k_t^{\alpha-1} + 1 - (1+r_t)\right\}\frac{(1+n_{t-1})(1+n_t)}{(1+\rho)^2} = 0$$

と求められ、式(32)が得られる。

更に式(32)は、分権的達成がなされておれば$f'(k_t) = r_t$が満たされるので、

$\dfrac{1+r_t}{1+\theta} = \dfrac{c_{t-1}^r}{c_{t-1}^y}$が導出される。

＊5）定常状態では式(34)、(35)は、それぞれ

$$\Psi \equiv (2+\theta)(1+n)k + A\left\{(2+\theta)(1+n)\alpha - 1 + \alpha\right\}k^{\alpha} + A^2\alpha(\alpha-1)k^{2\alpha-1}$$
$$+\{1 + A\alpha k^{\alpha-1} + (1+n)(1+\theta)\}\tau = 0 \quad (34)'$$

$$\phi \equiv (2+\rho+\theta)(1+n)k + \left\{(1+\theta)(1+n)\alpha - (1+\rho)(1-\alpha)\right\}Ak^{\alpha} + \left\{1+\rho+(1+\theta)(1+n)\right\}\tau = 0 \quad (35)'$$

となる。

これらの連立方程式において内生変数はk, τである。ヤコビ行列は

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial\Psi}{\partial k} & \dfrac{\partial\Psi}{\partial\tau} \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial k} & \dfrac{\partial\phi}{\partial\tau} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial k}{\partial n} \\ \dfrac{\partial\tau}{\partial n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial\Psi}{\partial n} \\ -\dfrac{\partial\phi}{\partial n} \end{bmatrix}$$

となる。

$$\frac{\partial\Psi}{\partial k}=(2+\theta)(1+n)+A\alpha\left\{(2+\theta)(1+n)\alpha-1+\alpha\right\}k^{\alpha-1}+A^2\alpha(\alpha-1)(2\alpha-1)k^{2\alpha-2}$$

$$+A\alpha(\alpha-1)k^{\alpha-2}\tau$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\tau}=1+A\alpha k^{\alpha-1}+(1+n)(1+\theta)$$

$$-\frac{\partial\Psi}{\partial n}=-\left\{(2+\theta)(1+A\alpha k^{\alpha-1})k+(1+\theta)\tau\right\}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial k}=(2+\rho+\theta)(1+n)+A\alpha k^{\alpha-1}\left\{(1+\theta)(1+n)\alpha-(1+\rho)(1-\alpha)\right\}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tau}=1+\rho+(1+\theta)(1+n)$$

$$-\frac{\partial\phi}{\partial n}=-(2+\rho+\theta)k-(1+\theta)\alpha Ak^{\alpha}-(1+\theta)\tau$$

を用いて、ヤコビ行列式 $|J|$ を求めると

$$|J|=\begin{vmatrix}\frac{\partial\Psi}{\partial k} & \frac{\partial\Psi}{\partial\tau}\\ \frac{\partial\phi}{\partial k} & \frac{\partial\phi}{\partial\tau}\end{vmatrix}=(1+n)\left[1+\rho+(1+n)(1+\theta)\left\{1-\rho(1+\theta)\right\}\right]$$

$$+\left[\alpha(1+\rho)+(1+\theta)\left\{\alpha(1+n)-1\right\}\right]A\alpha k^{\alpha-1}+\left[(1-\alpha)(1+\rho)-\alpha(1+n)(1+\theta)\right]A^2\alpha^2k^{2\alpha-2}$$

$$+(1-\alpha)\left\{1+\rho+(1+n)(1+\theta)\right\}\left\{(1-2\alpha)Ak^{\alpha}-\tau\right\}A\alpha k^{\alpha-2}$$

となる。

$$\frac{\partial k}{\partial n}=\frac{|J_k|}{|J|}=\frac{1}{|J|}\begin{vmatrix}-(2+\theta)(1+A\alpha k^{\alpha-1})k-(1+\theta)\tau & 1+A\alpha k^{\alpha-1}+(1+n)(1+\theta)\\ -(2+\rho+\theta)k-(1+\theta)A\alpha k^{\alpha}-(1+\theta)\tau & 1+\rho+(1+n)(1+\theta)\end{vmatrix}$$

の符号を調べる。

$$|J_k|=(1+\theta)\left[A\alpha k^{\alpha-1}\left\{\tau+A\alpha k^{\alpha}-(n+\rho)k\right\}+\rho(nk-\tau)\right]$$

となる。

$$if\,\rho<(1+\theta)^{-1},\frac{\tau}{k}<(1-2\alpha)Ak^{\alpha-1},\frac{1-\alpha}{\alpha}<n<\frac{(1-\alpha)(1+\rho)}{\alpha(1+\theta)}-1,$$

$$\frac{\tau}{k}<n<\frac{\tau-\rho}{k}+A\alpha k^{\alpha-1},then\frac{\partial k}{\partial n}>0$$

を得る。

＊6）同様にして

$$\frac{\partial\tau}{\partial n}=\frac{|J_\tau|}{|J|}=\frac{1}{|J|}\begin{bmatrix}\frac{\partial\Psi}{\partial k} & \frac{\partial\Psi}{\partial n}\\ \frac{\partial\phi}{\partial k} & \frac{\partial\phi}{\partial n}\end{bmatrix}$$

の符号を判定する。

$$|J_\tau| = (1+n)(1+\theta)(2+\theta)\alpha^2 A(k^2-k^\alpha)$$

$$+(1-\alpha)\alpha A\left[\left\{2+\rho+\theta+(1+\rho)(1+n)(2+\theta)\right\}k^\alpha-(1+\rho)(2+\theta)k^2\right]$$

$$+(1-\alpha)\alpha A^2 k^{2\alpha-1}\left[\alpha(3-\theta)+2\alpha\theta-(2+\rho+\theta)-k^{\alpha-1}A\alpha(1-2\alpha)(1+\theta)\right]$$

$$+\rho(1+n)(1+\theta)\tau+\tau^3 k^{\alpha-2}A(1-\alpha)\alpha(1+\theta)$$

$$+\tau k^{\alpha-1}\left[\alpha^2 A(1+\theta)(\rho-n)-\alpha A(1+\rho)(\alpha+\theta)-k^{\alpha-1}(1-\alpha)\alpha A^2(1+\theta)(1-3\alpha)\right]$$

より

$$if\, \rho < (1+\theta)^{-1}, \frac{\tau}{k} < (1-2\alpha)Ak^{\alpha-1},\quad \frac{1-\alpha}{\alpha} < n < \frac{(1-\alpha)(1+\rho)}{\alpha(1+\theta)}-1,$$

$$1 < k^{2-\alpha} < \frac{2+\rho+\theta}{(1+\rho)(2+\theta)}+1+n,\quad \frac{A\alpha(1-2\alpha)(1+\theta)}{\alpha(3+\theta)-(2+\rho+\theta)} < k^{1-\alpha},$$

$$\frac{(1-\alpha)A^2\alpha(1-3\alpha)(1+\theta)}{\alpha^2 A(1+\theta)(\rho-n)-\alpha A(1+\rho)(\alpha+\theta)} < k^{1-\alpha}, then \frac{\partial\tau}{\partial n} > 0$$

が明らかになる。

＊7）式(36)、(37)は定常状態において

$$\Psi \equiv (2+\theta)(1+n)k+\left\{(2+\theta)(1+n)\alpha+1-\alpha\right\}Ak^\alpha+A^2(1-\alpha)\alpha k^{2\alpha-1}$$

$$+A(1-\alpha)k^\alpha\tau\left\{1+(1+\theta)(1+n)\right\}+A^2(1-\alpha)\alpha k^{2\alpha-1}\tau = 0 \quad (36)',$$

$$\phi \equiv (1+n)(2+\rho+\theta)k$$

$$+Ak^\alpha\left[\tau(1-\alpha)\left\{1+\rho+(1+\theta)(1+n)\right\}-(1-\alpha)(1+\rho)+\alpha(1+\theta)(1+n)\right] = 0 \quad (37)'$$

となる。ヤコビ行列

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial\Psi}{\partial k} & \frac{\partial\Psi}{\partial\tau} \\ \frac{\partial\phi}{\partial k} & \frac{\partial\phi}{\partial\tau} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\partial k}{\partial n} \\ \frac{\partial\tau}{\partial n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial\Psi}{\partial n} \\ -\frac{\partial\phi}{\partial n} \end{bmatrix}$$

を用いて比較静学を行う。

$$\frac{\partial\Psi}{\partial k} = (2+\theta)(1+n)+A\alpha k^{\alpha-1}\left[(2+\theta)(1+n)\alpha+1-\alpha+(1-\alpha)\tau\left\{1+(1+\theta)(1+n)\right\}\right]$$

$$+A^2(1-\alpha)\alpha k^{2\alpha-2}(2\alpha-1)(1+\tau)$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\tau} = A(1-\alpha)k^\alpha\left\{1+A\alpha k^{\alpha-1}+(1+n)(1+\theta)\right\}$$

$$-\frac{\partial\Psi}{\partial n} = -\left\{(2+\theta)(1+A\alpha k^{\alpha-1})k+A(1-\alpha)k^\alpha(1+\theta)\tau\right\}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial k} = (1+n)(2+\rho+\theta)$$

$$+A\alpha k^{\alpha-1}\Big[\tau(1-\alpha)\Big\{1+\rho+(1+\theta)(1+n)\Big\}-(1-\alpha)(1+\rho)+\alpha(1+\theta)(1+n)\Big]$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tau}=A(1-\alpha)\alpha k\Big\{1+\rho+(1+\theta)(1+n)\Big\}$$

$$-\frac{\partial\phi}{\partial n}=-(2+\rho+\theta)k-Ak^{\alpha}(1-\alpha)(1+\theta)\tau-Ak^{\alpha}\alpha(1+\theta)$$

が導出される。

$$\frac{\partial\tau}{\partial n}=\frac{|J_\tau|}{|J|}=\begin{vmatrix}-\frac{\partial\Psi}{\partial n} & \frac{\partial\Psi}{\partial\tau}\\ -\frac{\partial\phi}{\partial n} & \frac{\partial\phi}{\partial\tau}\end{vmatrix}\Big/\begin{vmatrix}\frac{\partial\Psi}{\partial k} & \frac{\partial\Psi}{\partial\tau}\\ \frac{\partial\phi}{\partial k} & \frac{\partial\phi}{\partial\tau}\end{vmatrix}$$

の符号を調べると

$$if\Big\{(1+\theta)(1+n)+1+\rho\Big\}A(1-\alpha)\alpha^2\tau>(1+n)(2+\theta+\rho),\quad \alpha>1/2,$$

$$\Big\{(1+\theta)(1+n)+1\Big\}(1-\alpha)(1+\rho)>(1+n)(2+\theta+\rho)$$

$$+\Big\{1+(1+\theta)(1+n)\Big\}\Big\{(1+\theta)(1+n)+1+\rho\Big\}\tau(1-\alpha)+\Big\{(1+\theta)(1+n)+1\Big\}\alpha(1+n)(1+\theta),$$

$$(1-\alpha)(1+\rho)>\tau\Big\{(1+\theta)(1+n)+\rho+1\Big\}(1-\alpha)+\alpha(1+n)(1+\theta),|J_k|\gtrless 0,$$

$$then\ \partial k/\partial n\gtrless 0$$

が得られる。但し、

$$|J_k|=-A\alpha(1-\alpha)(2+\theta)\Big\{(1+\theta)(1+n)+1+\rho\Big\}k^2-A(1-\alpha)k^{\alpha+1}Q$$

$$+A^2(1-\alpha)k^{2\alpha}R+A^3\alpha(1-\alpha)k^{2\alpha-1}(1+\theta)\Big\{(1-\alpha)\tau+\alpha\Big\},$$

$$where Q=\Big\{A\alpha^2(2+\theta)+A\alpha(1-\alpha)(1+\theta)\tau\Big\}\Big\{(1+\theta)(1+n)+1+\rho\Big\}$$

$$-(2+\theta+\rho)\Big\{1+(1+\theta)(1+n)\Big\},$$

$$R=\alpha\Big[(1+\theta)\Big\{2+(1+\theta)(1+n)\Big\}+1+\rho\Big]+(1-\alpha)(1+\theta)\Big\{(1+\theta)(1+n)\tau+1\Big\}$$

である。

同様にして $\dfrac{\partial\tau}{\partial n}=\dfrac{|J_\tau|}{|J|}$ の符号を求めると、

$$if\Big\{(1+\theta)(1+n)+1+\rho\Big\}A(1-\alpha)\alpha^2\tau>(1+n)(2+\theta+\rho),\quad \alpha>1/2,$$

$$\Big\{(1+\theta)(1+n)+1\Big\}(1-\alpha)(1+\rho)>(1+n)(2+\theta+\rho)$$

$$+\Big\{(1+\theta)(1+n)+1\Big\}\Big[\Big\{1+\rho+(1+\theta)(1+n)\Big\}(1-\alpha)\tau+\alpha(1+\theta)(1+n)\Big],$$

$$(1-\alpha)(1+\rho)>\tau(1-\alpha)\Big\{1+\rho+(1+\theta)(1+n)\Big\}+\alpha(1+\theta)(1+n),$$

$$\alpha\Big\{(1-\tau)(1+\theta)(1+\rho)+\theta+2\rho+3\Big\}>(1+n)(1+\theta)\rho\tau$$

$+\alpha(2+\theta)\Big[(1+\theta)(1+\rho)+\Big\{(1+\theta)(1+\rho)+1+\rho\Big\}\tau\Big],$

$(2+\theta+\rho)(1-\alpha)(2\alpha-1)(1+\tau)$

$+\Big[(2+\theta)(1+n)\alpha+1-\alpha+(1-\alpha)\tau\Big\{1+(1+\theta)(1+\rho)\Big\}\Big](1+\theta)\Big\{(1-\alpha)\tau+\alpha\Big\}$

$>\Big[\tau(1-\alpha)\Big\{1+\rho+(1+\theta)(1+\rho)\Big\}-(1-\alpha)(1+\rho)+\alpha(1+\theta)(1+\rho)\Big]\Big\{\alpha(2+\theta)+(1-\alpha)(1+\theta)\tau\Big\},$

then $\partial\tau/\partial n<0$

を得る。