公的年金政策と人口動学に関する分析

An analysis of public pension policy with population dynamics

久　保　和　華[1]

近年、人口高齢化と共に少子化傾向が進展し、公的年金制度の世代間公正問題等盛んに議論されている。本論文の目的は、子供に対する需要（最適出生数）の決定を導入した二期間世代重複モデルを構築し、一括税によって財源調達を行う賦課方式年金制度の下で保険料、養育費、子供に対する選好ウェイトが最適出生数および資本労働比率にどのような影響を与えているのかを定性的に考察することである。

本モデルの特徴は、利己的な親を仮定し出生数を内生化することによって、少子化と保険制度の関係に焦点をあてて分析を試みている点である。

主な結論として、子供に対する選好ウェイトの低下、保険料の上昇、養育費の上昇は、個人の出生数を低下させる効果があること、また定常状態における資本労働比率に対して、保険料は正の効果をもち養育費、選好ウェイトは負の効果をもつことが得られた。

キーワード：世代重複モデル、賦課方式年金制度、最適出生数、資本労働比率、最適保険料

目　次

[1] 宮崎公立大学　E-mail　kubo@miyazaki-mu.ac.jp

Ⅰ　はじめに

Blanchard and Fisher (1989) の経済成長モデルは、人口成長率は一定の外生変数であると仮定している。しかし人口成長率を内生化したモデルが輩出してきており、先駆的なものとしてBecker and Barro (1989) が挙げられる。Becker and Barro (1989) は、親は愛他的であると仮定し、親の効用関数を自身の消費による効用と代表的子供の効用とに依存する形で提示している。一方、Leibenstein (1957) は、子供に対する需要は、愛玩的需要、引退後の保険需要、労働力であると見ている。

本稿は、従来の二期間世代重複モデルに、子供に対する需要の決定を導入して、人口成長率の内生化を試みるものである。公的年金制度が存在しない経済と賦課方式年金制度が存在する経済において、資本労働比率の定常解とパラメーターの相互関係および子供に対する需要の定常解と利子率の定常解の関係を考察する。個人が最適な保険料の決定を行う場合、保険料の定常解の性質について分析を行う。

本稿の構成は、以下のとおりである。第Ⅱ節で、社会保険制度が存在しない基本的なモデルを構築し、定常状態における分析を行う。第Ⅲ節では、一括税方式で保険料を徴収する年金制度を有する経済を導入して展開する。第Ⅳ節では、個人による最適保険料の決定モデルを提示し、保険料の定常解が養育費の変化によって受ける効果を導出する。第Ⅴ節において、本稿における今後の課題を言及する。

Ⅱ　基本モデル

Ⅱ.1　基本モデルの展開

本節では基本モデルを提示し、最も基本的な静学的アプローチを行っている。

代表的な個人は二期間（労働期間と引退期間）生存し、第一期目には生産活動に参加し、第二期目には引退する。第 t 世代（ t 期に生まれた）の個人は労働期間（第一期）に労働を非弾力的に供給して賃金所得を獲得し、その所得の一部を消費と子供の養育費に充て残りを貯蓄する。引退期間（第二期）には、労働期間に行った貯蓄とその利子収入を取り崩して消費を行うものとする。また個人は労働期間中に子供をもうけ、その子供は親が引退すると同時に生産活動に参加する。親は利己的であり、自身の労働期間と引退期間の消費と子供から効用を受けると仮定する。子供に対する需要は愛玩的需要であるとする。第 t 世代の効用関数 u を対数線形であるとして以下のように定式化する。

$$u = \ln c_t^y + (1+\theta)^{-1} \ln c_t^r + \alpha \ln n_t \qquad (1)$$

ここで c_t^y は第 t 世代の労働期の消費、c_t^r は第 t 世代の引退期の消費、n_t は子供の数を表している。

ｔは世代、α は子供に対する選好のウエイトを示す指標である。(1)式において引退期の消費は時間選好率 θ によって割り引かれている。

第ｔ世代は労働期に賃金所得 w_t をすべて労働所得として獲得する。その所得の一部を消費と子供の養育費に当てる。子供一人を育てるのにかかる費用は $m+pw_t$ である。m は出産費用や育児費用など直接的な費用を表し、p は労働をあきらめ出産・育児に時間を費やすことから生じる機会費用を表す。機会費用は賃金所得の一定比率であるとする。労働賃金所得から労働期の消費と子供を養育する費用を差し引いた残りが貯蓄され引退期の消費に充てられるので、第ｔ世代の予算制約は次の(2)、(3)で表される。

$$c_t^y+(m+pw_t)n_t = w_t-s_t \qquad (2)$$

$$c_t^r = (1+r_{t+1})s_t \qquad (3)$$

ここで、s_t は貯蓄、r_{t+1} はｔ＋１期の利子率を表している。

利子率、賃金所得を所与として効用関数(1)を制約式(2)、(3)に基づいて最大化すると、最適化の一階の条件が以下のように得られる。

$$\frac{c_t^r}{c_t^y} = \frac{1+r_{t+1}}{1+\theta} \qquad (4)$$

$$\frac{n_t}{c_t^y} = \frac{\alpha}{m+pw_t} \qquad (5)$$

式(4)、(5)より貯蓄及び子供に対する需要は式(6)、(7)として求められる。

$$s_t = \frac{w_t}{(2+\theta)(1+\alpha)-\alpha} \qquad (6)$$

$$n_t = \frac{\alpha(1+\theta)w_t}{(m+pw_t)\{(2+\theta)(1+\alpha)-\alpha\}} \qquad (7)$$

(3)、(4)式から各パラメーターの効果を調べてみると、

$$\frac{\partial s_t}{\partial w_t} = \frac{1}{(2+\theta)(1+\alpha)-\alpha} > 0$$

$$\frac{\partial s_t}{\partial \alpha} = -\frac{(1+\theta)w_t}{\{(2+\theta)(1+\alpha)-\alpha\}^2} < 0$$

$$\frac{\partial s_t}{\partial \theta} = -\frac{(1+\alpha)w_t}{\{(2+\theta)(1+\alpha)-\alpha\}^2} < 0$$

$$\frac{\partial n_t}{\partial w_t} = \frac{\alpha m(1+\theta)w_t}{\{(2+\theta)(1+\alpha)-\alpha\}(m+pw_t)} > 0$$

$$\frac{\partial n_t}{\partial m} = -\frac{\alpha(1+\theta)w_t}{\{(2+\theta)(1+\alpha)-\alpha\}} < 0$$

$$\frac{\partial n_t}{\partial p} = -\frac{\alpha(1+\theta)w_t^2}{\left\{(2+\theta)(1+\alpha)-\alpha\right\}(m+pw_t)^2} < 0$$

$$\frac{\partial n_t}{\partial \alpha} = \frac{(1+\theta)w_t(1-\alpha)}{\left\{(2+\theta)(1+\alpha)-\alpha\right\}(m+pw_t)} > 0$$

$$\frac{\partial n_t}{\partial \theta} = \frac{\alpha w_t}{(m+pw_t)\left\{(2+\theta)(1+\alpha)-\alpha\right\}^2} > 0$$

となる。以上の結果から、子供に対する選好が上がると貯蓄が減少し、子供に対する需要が増加する。また養育のコストが上昇すると子供の需要は減少することが確認できた。

次に生産部門を導入する。代表的企業は資本ストックと労働を用いて、規模に関して収穫一定の技術のもとで財を生産していると仮定する。生産関数は

$$Y_t = F(K_t N_t)$$

である。ここで、Y_t は第ｔ期の生産量、K_t は第ｔ期の資本ストック、N_t は第ｔ期の労働者数を表している。一人当たりで表した生産関数を次のような Cobb-Douglas 型で特定化する。

$$f(k_t) = k_t^a, \quad 0 < a < 1$$

ここで、$f(k_t) \equiv F(K_t, N_t)/N_t = F(K_t/N_t, 1)/N_t$ であり、k_t は第ｔ期の資本労働比率を表し、a は資本への分配率を表している。

完全競争を仮定して、利潤最大化を行うと、要素市場均衡条件は

$$r_t = f'(k_t) = ak_t^{a-1} \tag{8}$$

$$w_t = f(k_t) - k_t f'(k_t) = (1-a)k_t^a \tag{9}$$

となる。

第ｔ世代の貯蓄は第ｔ＋１期の資本ストックとなっている。財市場の均衡条件は以下のように純投資と純貯蓄が等しくなるという均衡式が成立する。

$$K_{t+1} - K_t = N_t s_t - K_t$$

つまり

$$K_{t+1} = N_t s_t$$

が成立する。したがって、資本蓄積方程式は

$$k_{t+1} n_t = s_t \qquad (10)^{2}$$

となる。

[2] 財市場の均衡式から $\dfrac{K_{t+1}}{N_{t+1}}\dfrac{N_{t+1}}{N_t} = s_t$ と変形でき、第ｔ世代 N_t 人が n_t の子供を産むことを考慮すると第ｔ世代の人口 N_{t+1} 人は $N_t n_t$ であることより導出される。

Ⅱ.2　動学的分析

本節では、資本蓄積を考慮した動学的な分析へ拡張を試みる。

まず資本蓄積方程式(10)に貯蓄関数(6)、子供に対する需要関数(7)を代入すると、

$$k_{t+1}=\frac{m+p(1-\alpha)k_t}{\alpha(1+\theta)} \qquad (11)$$

を得る。資本蓄積の経路を求めるために k_{t+1}/k_t を求める。陰関数定理を用いて[3]

$$\frac{dk_{t+1}}{dk_t}=\frac{a(1-a)p}{\alpha(1+\theta)}k_t^{a-1}$$

を得ることができる。

定常状態とは各期の資本労働比率が等しい状態 $k_t=k_{t+1}=k$ であると定義する。

補題1　資本労働比率は定常解へ向かって収束する。

証明 $\dfrac{dk_{t+1}}{dk_t}>0$ である。また条件 $\dfrac{a(1-a)p}{\alpha(1+\theta)}<k_t^{1-a}$ が満たされるならば $\dfrac{dk_{t+1}}{dk_t}<1$ が成立する。

定常状態での資本労働比率は $k=\dfrac{m+p(1-a)k^a}{\alpha(1+\theta)}$ 　　(11)' を満たす。

ここで、陰関数定理を用いて各パラメーターが資本労働比率の定常解 k に与える効果を求めると、以下を得ることができる。子供に対する選好ウエイトの効果は

$$\frac{dk}{d\alpha}=-\frac{(1+\theta)k}{\alpha(1+\theta)-a(1-a)pk^{a-1}}$$

となる。

$\dfrac{a(1-a)p}{\alpha(1+\theta)}<k^{1-a}$ ならば $dk/d\alpha<0$ である。十分条件の下で、子供に対する選好ウエイトが高まると資本労働比率が低下することが確認できる。時間選好率、直接的養育費用、間接的養育費用の効果は、

$$\frac{dk}{d\theta}=\frac{\alpha k}{\alpha(1+\theta)-a(1-a)pk^{a-1}}$$

$$\frac{dk}{dm}=\frac{1}{\alpha(1+\theta)-a(1-a)pk^{a-1}}$$

$$\frac{dk}{dp}=\frac{(1-a)k^a}{\alpha(1+\theta)-a(1-a)pk^{a-1}}$$

となる。

$\dfrac{a(1-a)p}{\alpha(1+\theta)}<k^{1-a}$ ならば $\dfrac{dk}{d\theta}<0$, $\dfrac{dk}{dm}>0$, $\dfrac{dk}{dp}>0$ が成立する。定常状態での資本労働比率は時間選好率が上昇すれば低下し、養育のための費用が増加すれば上昇することを導出できた。

---

[3] $\zeta=\alpha(1+\theta)k_{t+1}-\left\{m+p(1-a)k_t^a\right\}=0$ とおいて、$\dfrac{dk_{t+1}}{dk_t}=-\dfrac{\partial\zeta/\partial k_t}{\partial\zeta/\partial k_{t+1}}$ を計算する。

次に、定常状態における子供の需要は、定常状態の定義と要素市場均衡式を考慮すると賃金率は利子率の関数となるので、$w=(1-a)a^{\frac{a}{1-a}}r^{\frac{-a}{1-a}}$ を(7)式の定常状態に代入すると

$$n=\frac{\alpha(1+\theta)(1-a)a^{\frac{a}{1-a}}r^{\frac{-a}{1-a}}}{\left\{m+p(1-a)a^{\frac{a}{1-a}}r^{\frac{-a}{1-a}}\right\}\left\{(2+\theta)(1+\alpha)-\alpha\right\}} \tag{12}$$

となる。

命題1　子供の数および利子率の定常解は一意に存在する。

証明　(12)式において、$r\rightarrow 0$ のとき $n\rightarrow\dfrac{\alpha(1+\theta)}{(2+\theta)(1+\alpha)-\alpha}$ となる。

(12)式において、$r\rightarrow\infty$ のとき $n\rightarrow 0$ となる。したがって n は r の増加とともに0に漸近していくことになる。(12)式を r で微分すると、

$$\frac{dn}{dr}=-\frac{\alpha m(1+\theta)a^{\frac{a}{1-a}}r^{\frac{-1}{1-a}}}{\left\{(2+\theta)(1+\alpha)-\alpha\right\}\left\{m+p(1-a)a^{\frac{a}{1-a}}r^{\frac{-1}{1-a}}\right\}^2}<0$$

となる。すなわち、n は r の増加に伴って単調に減少することになる。したがって定常解 (n,r) が一意に存在する。　（証明終）

Ⅲ　賦課方式年金制度の導入

本節では、賦課方式による年金制度を導入し、子供に対する需要や資本蓄積が年金制度がない経済と比べてどのように変更されるかを考察する。

Ⅲ.1　基本モデルの変更

政府が第t世代の労働期間に一括税方式の保険料を徴収し、その保険料をもとに引退期にある第t－1世代へ年金給付の移転支払いを行う賦課方式年金制度を導入したモデルを展開する。

政府は第t世代の労働期に保険料 τ_t を徴収し、それを財源として第t－1世代へ一人当たり年金給付として所得移転 η_t を行うものとする。したがって引退期には子供 n_t から徴収した保険料がそのまま移転されることになる。さらに政府は保険料の給付額と徴収額が等しくなるような政策をとっているとする。この財政政策の関係式[4]は

$$\eta_{t+1}=n_t\tau_{t+1}$$

である。

年金制度を導入することによって、第t世代の予算制約は(13)、(14)に変更される。

$$c_t^y+(m+pw_t)n_t=w_t-s_t-\tau_t \tag{13}$$

---

[4] この関係式は $N_t\eta_{t+1}=N_{t+1}\tau_{t+1}$ から導出される。

$$c_t^r=(1+r_{t+1})s_t+n_t\tau_{t+1} \tag{14}$$

効用関数は(1)式のままであるとする。しかし本節では、子供に対する需要は引退期の保険需要と愛玩的需要[5]であるとする。

利子率、賃金所得、保険料を所与とし、(13)、(14)式を制約として(1)式を最大化すると、一階条件が以下のように得られる。

$$\frac{c_t^r}{c_t^y}=\frac{1+r_{t+1}}{1+\theta} \tag{15}$$

$$\frac{m+pw_t}{c_t^y}=\frac{\tau_{t+1}}{(1+\theta)c_t^r}+\frac{\alpha}{n_t} \tag{16}$$

子供に対する需要関数および貯蓄関数は

$$n_t=\frac{(1+\theta)(1+r_{t+1})(w_t-\tau_t)}{(1+r_{t+1})(m+pw_t)\left\{(2+\theta)(1+\alpha)-\alpha\right\}-\left\{\alpha(1+\theta)+(2+\theta)\right\}\tau_{t+1}} \tag{17}$$

$$s_t=\frac{w_t-\tau_t}{2+\theta}\frac{(1+\theta)\left\{(1+r_{t+1})(m+pw_t)+(1+\theta)\tau_{t+1}\right\}}{(1+r_{t+1})(m+pw_t)\left\{(2+\theta)(1+\alpha)-\alpha\right\}-\left\{\alpha(1+\theta)+(2+\theta)\right\}\tau_{t+1}} \tag{18}$$

となる。

命題2　養育のための費用が保険料の現在価値より小さいならば、子供に対する選好ウエイトの高まりは子供への需要を増加させる。保険料が上昇すれば子供への需要は減少し、一方、賃金所得や次世代の保険料が上昇すれば子供への需要は増加する。次期の利子率の上昇や養育費用の上昇は子供への需要を減少させる。

命題3　公的年金制度が存在しない経済と同様に、子供に対する選好ウエイトの上昇は貯蓄を減少させる。年金制度が存在しない経済においては貯蓄は養育費用に影響を受けなかったが、養育費用は貯蓄に正の効果をもつ。また保険料の上昇は子供への需要と貯蓄に負の効果をもつ。

証明　$\bullet if\ \dfrac{\tau_{t+1}}{1+r_{t+1}}<\dfrac{(m+p\tau_t)\left\{(2+\theta)(1+\alpha)-\alpha\right\}}{\alpha(1+\theta)+2+\theta},\ then\ \dfrac{\partial n_t}{\partial w_t}>0$

$$\bullet if\ \frac{(1+\theta)\left\{(1+r_{t+1})(m+pw_t)+(1+\theta)\tau_{t+1}\right\}}{(1+r_{t+1})(m+pw_t)\left\{(2+\theta)(1+\alpha)-\alpha\right\}-\tau_{t+1}\left\{\alpha(1+\theta)+2+\theta\right\}}$$

$$<\frac{(2+\theta)(1+\alpha)-\alpha+(w_t-\tau_t)}{(2+\theta)(1+\alpha)-\alpha},\ then\ \frac{\partial s_t}{\partial w_t}>0$$

---

[5] (17)を比較静学分析すると、時間選好率の上昇によって子供の需要が増加することから、本節においても愛玩的需要が含まれていると考えられる。

$$\bullet if\ m+pw_t < \frac{\tau_{t+1}}{1+r_{t+1}},\ then \frac{\partial n_t}{\partial \alpha} > 0, \frac{\partial s_t}{\partial \alpha} < 0$$

$$\bullet \frac{\partial n_t}{\partial m} < 0, \frac{\partial n_t}{\partial p} < 0, \frac{\partial n_t}{\partial \tau_{t+1}} > 0, \frac{\partial n_t}{\partial r_{t+1}} < 0$$

$$\bullet \frac{\partial s_t}{\partial m} > 0, \frac{\partial s_t}{\partial p} > 0, \frac{\partial n_t}{\partial \tau_{t+1}} > 0, \frac{\partial s_t}{\partial r_{t+1}} < 0$$

$$\bullet if \frac{\tau_{t+1}}{1+r_{t+1}} < \frac{(m+pw_t)\{(2+\theta)(1-\alpha)-\alpha\}}{\alpha(1+\theta)+2+\theta},\ then \frac{\partial n_t}{\partial \tau_t} < 0$$

$$\bullet if \frac{\tau_{t+1}}{1+r_{t+1}} < \frac{(m+pw_t)\{(1+\theta)\alpha+1\}}{(1+\theta)(\alpha+\theta+2)+1},\ then \frac{\partial s_t}{\partial \tau_t} < 0$$

$$\bullet if \frac{\tau_{t+1}}{1+r_{t+1}} < \frac{m+pw_t}{(1+\theta)(1+2\alpha)+2+\theta},\ then \frac{\partial n_t}{\partial \theta} > 0$$

Ⅲ.２　動学的分析

前節と同様に⑽式を用いて資本蓄積の経路を求め、さらに定常状態において資本労働比率がパラメーターから受ける効果を考察する。

資本蓄積方程式は次の⒅のように求められる。

$$k_{t+1} = \frac{\{m+p(1-a)k_t^a\}(1+ak_{t+1}^{a-1})B - D\tau_{t+1}}{A(1+ak_{t+1}^{a-1})} \tag{18}$$

但し、以下とする。

$$A = (1+\theta)(2+\theta)$$
$$B = 1+\alpha(1+\theta)$$
$$D = (1+\theta)(3+\alpha)+\theta^2$$

資本蓄積の経路を求めるために、陰関数定理を用いて⒅式から dk_{t+1}/dk_t を求めると以下のようになる。

$$\frac{dk_{t+1}}{dk_t} = \frac{p(1-a)ak_t^{a-1}(1+ak_{t+1}^{a-1})B}{A(1+a^2k_{t+1}^{a-1}) - Ba(1-a)k_{t+1}^{a-2}\{m+p(1-a)k_t^a\}} \tag{19}$$

条件 $\frac{A}{a(1-a)B} > \frac{k_t^{a-2}\{m+p(1-a)k_t^a\}}{1+a^2k_{t+1}^{a-1}}$ を満たせば、$dk_{t+1}/dk_t > 0$ が成り立つ。

さらに $k_t < a(1-a)mB/A$ のとき、$dk_{t+1}/dk_t < 1$ となる。したがって、資本労働比率は定常解へ向かって収束する。

ここで、定常状態における蓄積方程式を求めると以下のようになる。但し、各期の保険料は一

定であると仮定する。

$$D\tau+A-mB=a(mB-A)k^{a-1}+(1-a)pB(k^{a}+ak^{2a-1}) \tag{20}$$

資本労働比率の定常解は(20)式を満たすように決定される。

命題4　資本労働比率の定常解は、保険料の上昇に対して正の効果をもち、子供の選好ウエイト、養育費用に関して負の効果をもつ。

証明　定常状態において資本労働比率に関する比較静学分析を行う。(20)式から陰関数定理を用いて求めると、

$$\frac{dk}{d\tau}=\frac{D}{a(1-a)k^{a-2}}\frac{1}{A-mB+pBk-(1-2a)pBk^{a}}$$

$$\frac{dk}{dm}=-\frac{B}{a(1-a)k^{a-2}}\frac{ak^{a-1}+1}{A-mB+pBk-(1-2a)k^{a}}$$

$$\frac{dk}{dp}=-\frac{(1-a)B(k^{a}+ak^{a-2})}{a(1-a)k^{a-2}}\frac{ak^{a-1}+1}{A-mB+pBk-(1-2a)k^{a}}$$

$$\frac{dk}{d\alpha}=-\frac{amk^{a-1}B'(\alpha)+(1-a)pk^{a}B'(\alpha)+mB'(\alpha)-\tau D'(\alpha)}{a(1-a)k^{a-2}}\frac{1}{A-mB+pBk-(1-2a)k^{a}}$$

を得る。したがって、

- $if\ m<\dfrac{2+\theta}{1+\alpha},\quad k^{a-1}<\dfrac{1}{1-2a},\quad then\dfrac{dk}{d\tau}>0,\quad \dfrac{dk}{dm}<0,\quad \dfrac{dk}{dp}<0$
- $if\ m<\dfrac{2+\theta}{1+\alpha},\quad k^{a-1}<\dfrac{1}{1-2a},\quad k^{a-1}\left\{am+(1-a)pk\right\}+m+\tau,\quad then\dfrac{dk}{d\alpha}<0$

を導出できる。

次に、定常状態における子供に対する需要を求めると

$$n=\frac{(1+\theta)(1+r)(w-\tau)}{(1+r)(m+pw)\left\{(2+\theta)(1+\alpha)-\alpha\right\}-\left\{\alpha(1+\theta)+2+\theta\right\}\tau} \tag{21}$$

となる。(21)式に要素市場均衡条件を考慮すると[6]

$$n=\frac{(1+\theta)(1+r)\left\{(1-a)r^{\frac{-a}{1-a}}a^{\frac{a}{1-a}}-\tau\right\}}{(1+r)\left\{m+p(1-a)r^{\frac{-a}{1-a}}a^{\frac{a}{1-a}}-\tau\right\}\left\{(2+\theta)(1+\alpha)-\alpha\right\}-\left\{\alpha(1+\theta)+2+\theta\right\}\tau} \tag{22}$$

になる。(22)式を以下のように書き表す。

$$n=\frac{(1+\theta)(1+r)\left\{(1-a)r^{\frac{-a}{1-a}}a^{\frac{a}{1-a}}-\tau\right\}}{\left\{m+p(1-a)r^{\frac{-a}{1-a}}a^{\frac{a}{1-a}}\right\}(1+r)H-I\tau} \tag{23}$$

---

[6] 要素市場均衡条件(8)、(9)より $k=r^{\frac{-1}{1-a}}a^{\frac{1}{1-a}}$, $w=(1-a)k^{a}=(1-a)(r^{\frac{-1}{1-a}}a^{\frac{1}{1-a}})^{a}$ を用いる。

但し、以下のように置く。

$$H = (2+\theta)(1+\alpha)-\alpha$$
$$I = \alpha(1+\theta)+2+\theta$$

(23)において $r \to 0$ のとき、$n \to \dfrac{(1+\theta)\tau}{I\tau - mH}$ となる。但し、$\tau > m(1+\alpha)$ ならば、子供に対する需要の定常解は正の値をとる。

(23)において $r \to \infty$ のとき、$n \to -\tau/(mH)$ となる。

(23)において利子率の定常解が変化したとき、子供に対する需要の定常解がどのように変化するかを考察するために、dn/dr を求めると、以下のように導出される。

$dn/dr < 0$ が成立する条件[7]は、

$$r > \frac{a}{1-2a},\quad n > \frac{1+\theta}{p\left\{(2+\theta)(1+\alpha)-\alpha\right\}},\quad r\left\{(1+r)r^{\frac{-1}{1-a}}pa^{\frac{a}{1-a}}+m\right\} > \frac{\tau I}{H}-m$$

かあるいは

$$r < \frac{a}{1-2a},\quad n < \frac{1+\theta}{p\left\{(2+\theta)(1+\alpha)-\alpha\right\}},\quad r\left\{(1+r)r^{\frac{-1}{1-a}}pa^{\frac{a}{1-a}}+m\right\} > \frac{\tau I}{H}-m$$

である。

最後に、利子率の定常解の安定性を調べる。(17)、(8)、(9)から

条件 $n_t > \dfrac{1+\theta}{p\left\{(2+\theta)(1+\alpha)-\alpha\right\}}$ を満たしているならば、$dr_{t+1}/dr_t > 0$ が成立する[8]。

---

7 $\dfrac{dn}{dr} = -\dfrac{\partial\Psi/\partial r}{\partial\Psi/\partial n}$ は以下の結果を用いて導出している。

$$\frac{\partial\Psi}{\partial r} = (1-a)a^{\frac{a}{1-a}}r^{\frac{-a}{1-a}}\left\{1-\frac{a(1+r)}{(1-a)r}\right\}(nHp-1-\theta)+pHm+(1+\theta)\tau$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial n} = p(1-a)a^{\frac{a}{1-a}}r^{\frac{-a}{1-a}}(1+r)H+mH(1+r)\tau I$$

8 $\dfrac{dr_{t+1}}{dr_t} = -\dfrac{\partial\varphi/\partial r_t}{\partial\varphi/\partial r_{t+1}}$ から結論を得ている。その際、

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r_{t+1}} = (1-a)a^{\frac{a}{1-a}}r_t^{\frac{-a}{1-a}}(n_t pH-1-\theta)+Hmn_t+(1+\theta)\tau_t$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r_t} = -(1+r_{t+1})a^{\frac{1}{1-a}}r_t^{\frac{-a}{1-a}}\left\{n_t pH-(1+\theta)\right\}$$

を用いている。

Ⅳ　最適保険料政策[9]

前節では各期の保険料は外生変数としてとりあつかわれ一定であると仮定しているが、本節における各期の保険料は内生変数になっている。本節では、第ｔ世代が最適な保険料を決定するモデルを提示し、保険料の定常解の性質を考察する。

本節においては、第ｔ世代の効用関数は労働期および引退期の最適消費と子供に対する最適な需要に依存している。第ｔ世代は、ｔ期とｔ＋1期の利子率と保険料の関数[10]である間接効用関数を最大にするようにｔ期の保険料を決定する。間接効用関数は以下である。

$$\nu = \ln c_t^{y*} + (1+\theta)^{-1} \ln c_t^{r*} + \alpha \ln n_t^{*} \quad (24)$$

ここで、c_t^{y*} は労働期間の最適消費関数[11]をあらわし、c_t^{r*} は引退期間の最適消費関数[12]を表わし、n_t^{*} は子供に対する需要関数(17)である。

このとき、第0期の利子率 r_0 が初期値として与えられ、第ｔの利子率が制約となっている。第ｔ期の利子率は、資本蓄積方程式(10)、要素市場均衡条件式(8)、(9)、子供に関する需要関数(17)、貯蓄関数(18)から得られ、ｔ－1期の利子率とｔ期の保険料の関数となる。

第ｔ期の利子率は以下のような関数で表せる。

$$\left(\frac{r_t}{a}\right)^{\frac{1}{a-1}} = \frac{(1+r_t)(m+pw_{t-1})\left\{H-(m+pw_{t-1})\right\} - \tau_t\left\{I+(1+\theta)^2\right\}}{(1+\theta)(2+\theta)(1+r_t)} \quad (25)$$

最適化の一階条件を求めると以下のようになる。[13]

$$\frac{\partial \nu}{\partial \tau_t} = \frac{1}{c_t^{y*}} \frac{\partial c_t^{y*}}{\partial \tau_t} + \frac{(1+\theta)^{-1}}{c_t^{r*}} \frac{\partial c_t^{r*}}{\partial \tau_t} + \frac{\alpha}{n_t^{*}} \frac{\partial n_t^{*}}{\partial \tau_t} = 0 \quad (26)$$

(26)式は以下のようになる。

$$\frac{1}{c_t^{y*}}\left[\frac{\partial w_t}{\partial r_t}\frac{\partial r_t}{\partial \tau_t} - S - 1 - \left\{p n_t^{*} \frac{\partial w_t}{\partial r_t}\frac{\partial r_t}{\partial \tau_t} + (m+pw_t)N\right\}\right]$$

---

[9] 政策という呼称であるが、個人が最適な保険料を決定するという意味で用いており、政府の最適政策を扱っていない。

[10] 式(8)、(9)、(17)、(18)から第ｔ世代の労働期間の最適消費は第ｔ期の利子率、保険料、第ｔ＋1期の利子率、保険料の関数であることがわかる。同様にして引退期間の最適消費もこれらの関数となっている。

[11] (17)、(18)式を(13)式に代入することによって求められる。貯蓄関数も子供に対する需要関数も第ｔ期の利子率、保険料、第ｔ＋1期の利子率、保険料の関数となっている。

[12] 脚注11と同様にして、(14)、(17)、(18)式から得られる。

[13] 労働期、引退期の消費関数および子供に対する需要関数をｔ期の保険料で偏微分する際に、ｔ＋1期の利子率はｔ期の利子率とｔ＋1期の保険料の関数であることを考慮している。

$$+\frac{(1+\theta)^{-1}}{c_t^{r*}}\left[s_t^*\frac{\partial r_{t+1}}{\partial r_t}\frac{\partial r_t}{\partial \tau_t}+(1+r_{t+1})S+\tau_{t+1}N\right]+\frac{\alpha}{n_t^*}N=0 \quad (27)$$

但し、以下のように置いている。

$$S=\frac{\partial s_t^*}{\partial r_t}\frac{\partial r_t}{\partial \tau_t}+\frac{\partial s_t^*}{\partial \tau_t}+\frac{\partial s_t^*}{\partial r_{t+1}}\frac{\partial r_{t+1}}{\partial r_t}\frac{\partial r_t}{\partial \tau_t}$$

$$N=\frac{\partial n_t^*}{\partial r_t}\frac{\partial r_t}{\partial \tau_t}+\frac{\partial n_t^*}{\partial r_t}+\frac{\partial n_t^*}{\partial r_{t+1}}\frac{\partial r_{t+1}}{\partial r_t}\frac{\partial r_t}{\partial \tau_t}$$

最適保険料は(27)式を満たすように決定される。(27)式の計算[14]を行うと、非常に複雑なものとなった。

そこで第t世代が自分自身だけの効用を最大にするように保険料を選択する場合、最適保険料は定常状態においてどのような性質を有しているのかを考察する。

定常状態において、貯蓄関数、子供への需要関数、労働期間の消費関数、引退期の消費関数は、以下のようになる。

$$s^*=\frac{w-\tau}{2+\theta}\left(1-\frac{1+\theta}{\beta}\gamma\right),\quad n^*=(1+\theta)(1+r)(w-\tau)/\beta$$

$$c^{y*}=(w-\tau)(1+\theta)\left[\frac{1}{2+\theta}+\frac{1}{\beta}\left\{\frac{\gamma}{2+\theta}-(m+pw)(1+r)\right\}\right]$$

$$c^{r*}=(w-\tau)(1+r)\left[\frac{1}{2+\theta}+\frac{1+\theta}{\beta}\left(\tau-\frac{\gamma}{2+\theta}\right)\right]$$

但し、$\beta=(1+r)(m+pw)H-\tau I,\ \ \gamma=(1+r)(m+pw)+(1+\theta)\tau$とおく。

$$\left.\frac{\partial w_t}{\partial r_t}\right|_{k_t=k_{t+1}=k}=-ax^a r^{\frac{-1}{1-a}},\quad \left.\frac{\partial r_t}{\partial \tau_t}\right|_{k_t=k_{t+1}=k}=\frac{z}{xyzr^{\frac{1}{1-a}}\left\{1-\frac{1+r}{r(1-a)}\right\}}$$

$$\left.\frac{\partial w_t}{\partial r_t}\frac{\partial r_t}{\partial \tau_t}\right|_{k_t=k_{t+1}=k}=-\frac{ax^a zr^{\frac{-1}{1-a}}}{xyr^{\frac{1}{1-a}}\left\{1-\frac{1+r}{r(1-a)}\right\}-M(H-M)}$$

$$\left.\frac{\partial s_t}{\partial r_t}\right|_{k_t=k_{t+1}=k}=\left(\left.\frac{\partial w_t}{\partial r_t}\right|_{k_t=k_{t+1}=k}\right)$$
$$\times\frac{2+\theta}{\beta^2}\left[\beta\left\{\beta-p(1+\theta)(w-\tau)(1+r)\right\}+\gamma\left\{p(1+\theta)(w-\tau)(1+r)-(1+\theta)\beta\right\}\right]$$

$$\left.\frac{\partial s_t}{\partial \tau_t}\right|_{k_t=k_{t+1}=k}=-\frac{1}{2+\theta}\left(1-\frac{1+\theta}{\beta}\gamma\right),\quad \left.\frac{\partial s_t}{\partial r_t}\right|_{k_t=k_{t+1}=k}=-\frac{(w-\tau)M(1+\theta)(\beta-\gamma \mathrm{H})}{(2+\theta)\beta^2}$$

---

[14] 計算結果は省略している。

$$\left.\frac{\partial r_{t+1}}{\partial r_t}\right|_{k_t=k_{t+1}=k}=\left(\left.\frac{\partial w_t}{\partial r_t}\right|_{k_t=k_{t+1}=k}\right)\frac{(1+r)pH}{xr^{\frac{1}{a-1}}\left(1-\frac{1+\theta}{\beta}\gamma\right)-M(H-m-pw)}$$

$$\left.\frac{\partial n_t}{\partial r_t}\right|_{k_t=k_{t+1}=k}=\left(\left.\frac{\partial w_t}{\partial r_t}\right|_{k_t=k_{t+1}=k}\right)\frac{(1+\theta)(1+r)\{\beta-(w-\tau)(1+r)pH\}}{\beta^2}$$

$$\left.\frac{\partial n_t}{\partial \tau_t}\right|_{k_t=k_{t+1}=k}=-\frac{(1+\theta)(1+r)}{\beta},\quad \left.\frac{\partial n_t}{\partial r_{t+1}}\right|_{k_t=k_{t+1}=k}=\frac{(1+\theta)(w-\tau)}{\beta^2}\{\beta-(1+r)(m-pw)H\}$$

以上の結果を用いて(27)式を整理すると、以下のようになる。

$$\frac{azx^a r^{\frac{1}{a-1}}}{Q(1+r)}\left[R\left\{1-\frac{p(1+\theta)(1+r)(w-\tau)}{\beta}\right\}+X\frac{w-\tau}{2+\theta}(1-\frac{1+\theta}{\beta}\gamma)\right]+$$

$$\left[\frac{azx^a r^{\frac{1}{a-1}}}{\beta^2 Q}\left\{(2+\theta)Z-\frac{(1+\theta)(1+r)(w-\tau)MpH(\beta-\gamma H)}{(2+\theta)Q}\right\}+\frac{1-\frac{1+\theta}{\beta}\gamma}{2+\theta}\right]$$

$$\times(X-R)$$

$$+\left[\frac{azx^a r^{\frac{1}{a-1}}}{\beta^2 Q}\left[\beta-(w-\tau)\{(1+r)(1+MH)-\beta\}pH\right]+1\right]$$

$$\times\left[R\left\{\alpha X+\frac{M(1+\theta)(1+r)}{\beta}\right\}+\frac{\tau(1+\theta)(1+r)}{\beta}\right]+R=0 \quad (28)$$

但し、

$$Q=xyr^{\frac{1}{1-a}}\left(1-\frac{1+r}{(1-a)r}\right)-M(H-N)$$

$$R=\frac{1}{2+\theta}+\frac{1+\theta}{\beta}\left\{-\frac{\gamma}{2+\theta}+\tau\right\}$$

$$X=\frac{1}{2+\theta}+\frac{1}{\beta}\left\{\frac{\gamma}{2+\theta}-M(1+r)\right\}$$

$$Z=\beta\{\beta-p(1+\theta)(w-\tau)(1+r)\}+\gamma\{p(1+\theta)(w-\tau)(1+t)-(1+\theta)\beta\}$$

$$M=m+pw,\quad x=a^{\frac{1}{1-a}},\quad y=(1+\theta)(2+\theta),\quad z=I+(1+\theta)^2$$

$$\beta=(1+r)MH+\tau I,\quad \gamma=(1+r)M+(1+\theta)\tau$$

とおいている。

(28)式の左辺をςとおき陰関数定理を用いて、直接的養育費用の変化が最適保険料の定常解に与える効果を求める[15]。以下の十分条件

---

[15] $\frac{d\tau}{dm}=-\frac{\partial\varsigma/\partial m}{\partial\varsigma/\partial\tau}$ を求める。

$$\frac{2+r}{1+r}\tau < w,(1+r)M < \tau < \frac{(1+r)^2MH}{(1+r)I},\frac{d}{2+\theta} < \frac{\mu}{X\beta^2} < 1+\frac{dq}{\beta} \qquad (29)$$

を満たすならば、$\partial s/\partial\tau > 0$ が成り立つ。また、以下の条件(30)

$$\left\{(2+\theta)(1+\alpha)-\alpha\right\}/2 < M$$

$$RpH(1+\theta)(1+r)^2(w-\tau) < e\beta^2(2M-H)$$

$$\beta QH(1+r)\left\{1-p(w-\tau)(1-H(1+r))\right\} < q\left\{(1+r)HQ+\beta(2M-H)\right\}$$

を満たすならば、$\partial s/\partial m < 0$ が成立する。したがって条件(29)、(30)が満たされるならば、$d\tau/dm > 0$ が成立する。ただし、e は(28)式の第一項の大括弧内を表し、q は(28)式の第二項の大括弧内を表している。t は(28)式の第三項目の後者の大括弧内の一項目を表している。

V　おわりに

本稿は、利己的な個人を仮定して何人子供を産むかという決定問題を世代重複モデルに導入し、人口増加と資本蓄積および所得保障制度との関係を考察した。

静学的には、子供への選好が高まれば、将来の消費を減らしてでも子供への需要が増加することが年金制度の存在如何にかかわらず、明らかになった。教育費の高騰は明らかに子供への需要を減少させる方向に作用することもわかった。公的年金制度が存在する経済では、そのことはさらに貯蓄にプラスにはたらくことも得られた。保険料が上がれば貯蓄も子供に対する需要も減少し、次世代の保険料が上昇すれば子供への需要は増加し貯蓄は減少するという結果も得られた。

公的年金制度がない経済では、利子率の定常解が一意になることが導出され利子率の定常解が上昇すれば子供に対する需要の定常解は減少することが明らかとなったが、年金制度が存在する経済ではある領域に限定した場合に成立した。

本稿において、個人が選択する最適保険料の性質を明確に提示できなかったことは問題である。非常に複雑なものになるのは必至であろうと予想されるので、シミュレーションによる分析を行うことを今後の課題の一つにしたい。さらに課題として、政府による最適保険料の決定と死亡率の導入も残っている。

参考文献

[1] Becker,G. and R.J.Barro (1989),"A reformulation of the economic theory of fertility",Quarterly Journal of Economics,103,1-25

[2] Blanchard,O.J. and S.Fisher (1989),Lectures on Macroeconomics, MIT Press

[3] Leibenstein,H. (1957),Economic Backwardness and Economic Growth, Weily

[4] 前田純一（1998),「人口動学と経済成長に関する一考察」, mimeo
[5] 久保和華（1998),「世代重複モデルでの公的年金政策の経済分析」, mimeo