

Method to Discern Intersection of 2D Arcs Preventing Inconsistency in the Number of Crossing Points Caused by Calculation Error

Tadamitsu KANEKO*, Toshinori TSUJI*, Toshihiro KAWANO**,
Eiji KAGAMIYAMA***, and Yasuo NAKAYAMA****

**Faculty of Humanities, Miyazaki Municipal University,
Miyazaki-shi, 880 Japan*

***Kitakyusyu College of Technology, Kitakyusyu-shi, 803 Japan*

****Fujitsu Kyushu System Engineering Ltd., Fukuoka-shi, 812 Japan*

*****Faculty of Commercial Sciences, Kumamoto Gakuen University,
Kumamoto-shi, 862 Japan*

Abstract

In geometric computation, the discernment of intersection of figures occasionally fails because of calculation error, and therefore topological inconsistency occurs. Concerning this problem, it seems that the discernment of intersection of figures requires at least consistency in the number of crossing points. Thus we had previously noted a method to discern intersection of 2D line segments which brings about no inconsistency in the number of crossing points, and so we have applied it to 2D arcs. This paper introduces our algorithm, which uses only the relations of position between terminal points of one arc and original circle of another, and shows theoretically and experimentally that our algorithm almost satisfies the above requirement, and that the performance of our algorithm is better than the usual algorithm.

計算誤差による交点数の矛盾が生じにくい円弧同士の交差判定法

金子 正光 辻 利則 河野 俊弘 鏡山 英二 中山 泰雄

1. まえがき

計算機で図形を扱う際、計算誤差（以下、誤差と呼ぶ）による処理の破綻を避けるために、トポロジーに矛盾を生じないことが重視されている^{(1),(2),(3)}。例えば二つの多角形の交差については、“一方の図形の境界に沿って進むとき、他方の図形の境界を横切って内部へ入れば、どこかで必ず他方の図形の境界をもう一度横切って外部へ出る”というトポロジーの基本的性質⁽²⁾が常に満足されねばならない。このことから、図形相互間の交差判定の計算結果において交点数の無矛盾性が要求される。そこで著者らは、誤差による交差判定の誤りが上記の要求にどのように関わっているかを調べることにし、2次元の線分同士の交差判定に用いられる主要な二つの方式の比較を行い、結果を報告した⁽⁴⁾。その方式の一つは、線分を延長した二直線の交点が元の二線分上にあるかを調べる方式であり、もう一つは、一方の線分の二端点と他方の線分との相互位置関係を調べる方式である。比較の結果、後者を用いると交点数の無矛盾性が保障されることが明らかになった。

さて2次元の曲線同士の交差判定に注目すると、普通、上述した前者の方式やNewton-Raphson法などの数値計算法が使われており、後者の応用はあまり見られない。しかし後者の方式は、上記の利点を持っているだけでなく、数値計算における反復による計算時間の増大や収束の問題を生じない。従って曲線図形への応用は有意義であろう。そこで著者らは、使用頻度が比較的高い2次元の円弧に対して後者を応用することを試みるとともに、従来の方式（二つの円の交点位置から交差を判定する方式）との実験的な比較を行った^{(5),(6)}。

2章では提案の方式における円弧の定義方法を、3章では処理手順を説明する。次に4章で矛盾の発生の可能性を理論的に検討し、5章で従来の方式との実験比較を行う。更に6章で計算量に関する検討を行う。

2. 円弧の定義

目的とする円弧同士の交差判定法を実現するためには、一方の円弧の二端点が他方の円弧の元の円によって分割される二つの領域のいずれの側に存在するかを、各々の円弧に関して求めることができればよいと思われる。この観点から、二つの端点の座標と円周角による円弧の定義を提案する。

図1に示すように、円弧は始点 $S(x_s, y_s)$ から反時計回りに終点 $E(x_e, y_e)$ まで進むあいだの弧であり、円周角 ϕ_0 を持つものとする。 ϕ_0 は S および E からそれぞれ円弧上の点 $A(X, Y)$ に向かう二つのベクトル \vec{SA} と \vec{EA} とのなす角であり、 $-\pi < \phi_0 < 0$ である。 $\phi_0 = 0$ すなわち円弧が完全な円の場合は、円を適当な大きさの円周角を持つ二つの円弧に分割し、それらだけから成る独立した図形とみなせばよい。また、 $\phi_0 = -\pi$ すなわち円弧の二つの端点が重なって円弧が点になる場合は、交差判定の対象から除外する。なお、計算の便宜上、 ϕ_0 のかわりに余接 $\cot \phi_0$ を用いることにする。

円弧の元の円の方程式は、 \vec{SA} と \vec{EA} の内積および外積の比をとって、

$$\frac{(X-x_s)(X-x_e) + (Y-y_s)(Y-y_e)}{(X-x_s)(Y-y_e) + (Y-y_s)(X-x_e)} = \cot \phi_0 \quad (1)$$

となる。前述の ϕ_0 の範囲から、式(1)の分母は0ではない。円弧を表わすには、 \vec{SA} と \vec{EA} の外積が負であることから、つぎの条件を付加すればよい。

$$(X-x_s)(Y-y_e) + (Y-y_s)(X-x_e) < 0 \quad (2)$$

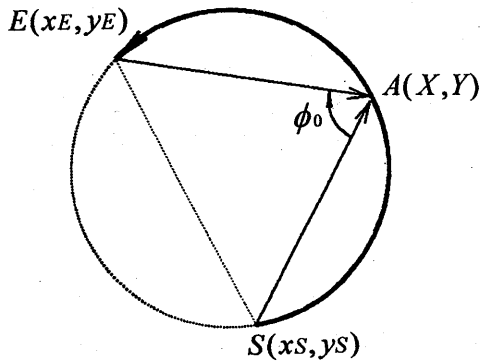


図1 円弧の定義

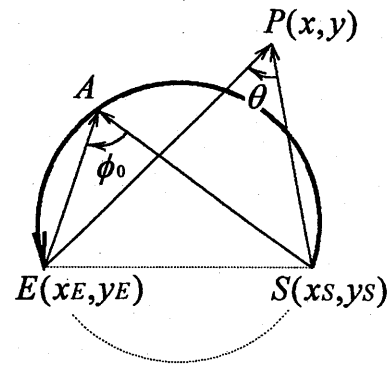


図2 定義された円弧と点

なお、本論文で扱う図形は、単独円弧、または端点を介して連結された複数円弧から構成されるものとする。

3. 円弧同士の交差判定

始めに点と円との位置関係の調べ方を、次にそれを用いた交差判定の仕方を述べる。

3. 1 点と円との位置関係

ここでは与えられた点が、円弧の元の円に関して内外いずれの側にあるか（以下、点の内外判定と呼ぶ）の調べ方を説明する。図2に示すように、定義された円弧と、点 $P(x, y)$ が与えられているものとする。二つのベクトル \vec{SP} と \vec{EP} とのなす角を θ とし、 θ の符号は外積 $\vec{SP} \times \vec{EP}$ によって与えられるものとする、 θ の余接は式(1)と同様な次式で与えられる。

$$\cot \theta = \frac{(x - x_S)(x - x_E) + (y - y_S)(y - y_E)}{(x - x_S)(y - y_E) + (y - y_S)(x - x_E)} \quad (3)$$

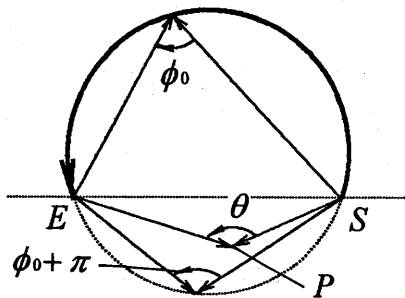
ここで右辺の分子および分母の符号はそれぞれ $\cos \theta$ および $\sin \theta$ の符号と一致する。この $\cot \theta$ の値と $\cot \phi_0$ の値との大小比較により位置関係を求めることができる。 P が円の内側にあるための条件は次のようになる。

(a) $\sin \theta > 0$ の場合（図3(a)参照）

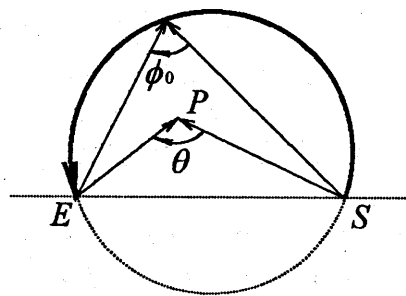
$$\theta > \phi_0 + \pi \text{ すなわち } \cot \theta < \cot \phi_0. \quad (4)$$

(b) $\sin \theta < 0$ の場合（同図(b)参照）

$$\theta < \phi_0 \text{ すなわち } \cot \theta > \cot \phi_0. \quad (5)$$



(a) $\theta > 0$ の場合



(b) $\theta < 0$ の場合

図3 点 P と円との内外判定

P が円の外側にあるための条件は、式(4)および(5)の不等号の向きを反対にしたもので与えられる。ただし式(3)の右辺の分母が0の場合は、 P が S と E を通る直線上にあると解釈し、座標値を直接比較することにより内外判定を行う。なお、 $\cot \theta = \cot \phi$ となるときは P が円周上にあると考え、そのとき式(3)の右辺の分母が負の場合は P が円弧上にあり、正の場合は定義された円弧の補集合としての円弧（円周から定義された円弧を引いた部分）上に P があると解釈する。

3. 2 二つの円弧の交差判定

いま二つの円 A と B およびそれらの一部分としての円弧 A と B があるものとする。まず、円弧 A の始点、終点と円 B との内外判定による位置関係を、図4に示す①～④の4通りに分類する。ここで①および④は

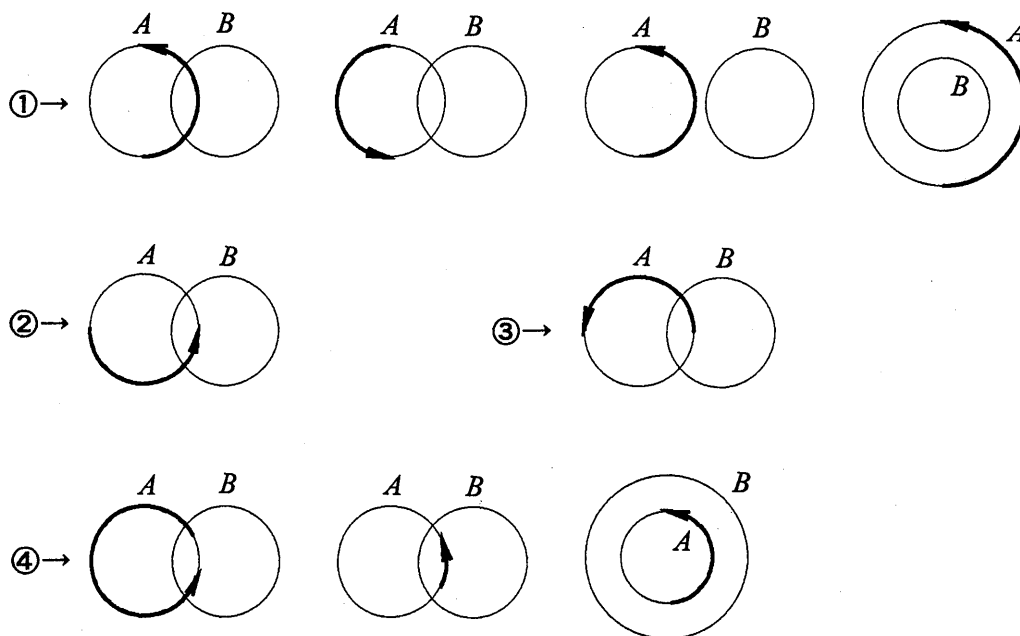


図4 円弧 A と円 B との位置関係

複数の配置を含む。また始点、終点が円周上にある場合については3.4節で検討する。

次に図4の分類において A と B の立場を交換すれば、円弧 B の始点、終点と円 A との位置関係の同様な分類①'～④'が得られる。そこで①～④と①'～④'とを組み合わせることによって二つの円弧の交差状況が表1のように表わされる。この表の各欄右下の数値はその配置における交点数である。ただし①と①'、①と④'および④と①'の組合せに対応する各欄では、円同士が交わらない配置を省略してある。表1は、交点数に着目して次の4通りの配置に分類することができる。

(1) 交点数1の配置

- ・②と③'および③と②'の組合せに対応する欄が該当する。二円弧の交点数は1である。
- ・一方の円弧の始点および終点がそれぞれ他方の円の内側および外側にあり、他方の円弧の始点および終点がそれとは逆の位置関係にある様な配置である。

(2) 交点数0の配置

- ・②と②'および③と③'の組合せに対応する欄が該当する。二円弧は決して交差しない。
- ・一方の円弧の始点および終点がそれぞれ他方の円の内側および外側にあり、他方の円弧の始点および終点がそれと同様の位置関係にある様な配置である。

表1 二つの円弧の交差の組み合わせ

Positions of terminal points of arc B Positions of terminal points of arc A		①' start point : out of circle A end point : out of circle A		②' start : out end : in		③' start : in end : out		④' start point : in circle A end point : in circle A	
		A B	A B	A B	A B	A B	A B		
① start point : out of circle B end point : out of circle B	A B								
	A B								
② start : out end : in	A B								
	A B								
③ start : in end : out	A B								
	A B								
④ start point : in circle B end point : in circle B	A B								
	A B								

(Numerical value in each case indicates the number of crossing points.)

(3)交点数0/2の配置

・①と①' , ①と④' , ④と①' , ④と④' の組合せに対応する欄が該当し, 交点数は0又は2で不確定である。

・どちらの円弧に関しても, 一方の円弧の二つの端点他方の円に対して共に同じ側にある様な配置である。

(4)交点数0/1の配置

・残りの欄が該当し, 交点数は0又は1で不確定である。

・一方の円弧の二つの端点それぞれ他方の円の内側および外側にあり, 他方の円弧の二つの端点は初めの円に対して共に同じ側にある様な配置である。

さて, 交点数0/2の配置において交差が不確定な原因は, 提案の方式では, 本来の円弧に対してその補集合としての円弧の存在の可能性を否定できないため, または二つの円の交差の有無を決定できないため

である。前者の例を図5(a)に、後者の例を同図(b)に示す。(a),(b)ともに、左側が交点数0、右側が交点数2の配置である。どちらの交点数でもトポロジーに矛盾は生じない。その理由は、いずれにしても“一方の図形の境界に沿って進むとき、他方の図形の境界を横切って内部へ入れば、どこかで必ず他方の図形の境界をもう一度横切って外部へ出る”というトポロジーの基本的性質⁽²⁾が満たされるからである。従って、交点数0/2の配置では0, 2いずれの交点数を採用してもよい。

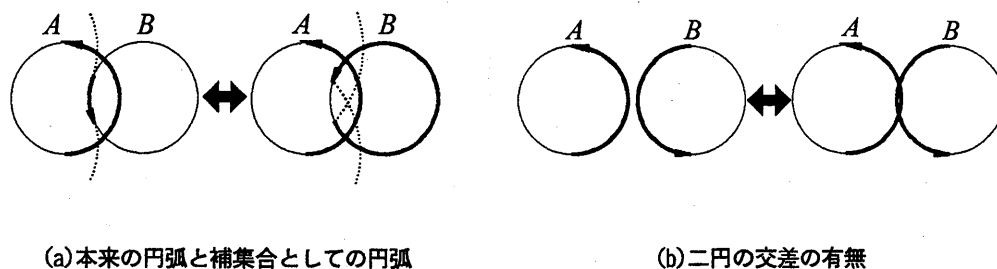


図5 交点数0/2の配置における不確定さ

3. 3 交点数0/1の配置での交点数の決定

交点数0/1の配置の場合は、0, 1いずれの交点数をとるかは交差の有無に関わるので明確に決定しなければならない。表1の①と②'の組合せを例にとる。図6に二つの円弧が交差する場合の配置を示す。この図は円弧Bの始点 S_B と終点 E_B を結ぶ直線と、円弧Aの始点 S_A および終点 E_A との位置関係に基づいて分類してある。(a)は S_A および E_A が直線に関して互いに反対側にある場合であり、(b)および(c)は S_A と E_A が直線に関して同じ側にある場合である。ここで $\overrightarrow{S_B S_A}$ と $\overrightarrow{E_B S_A}$ がなす角を θ_S 、 $\overrightarrow{S_B E_B}$ と $\overrightarrow{E_A S_A}$ がなす角を θ_E 、

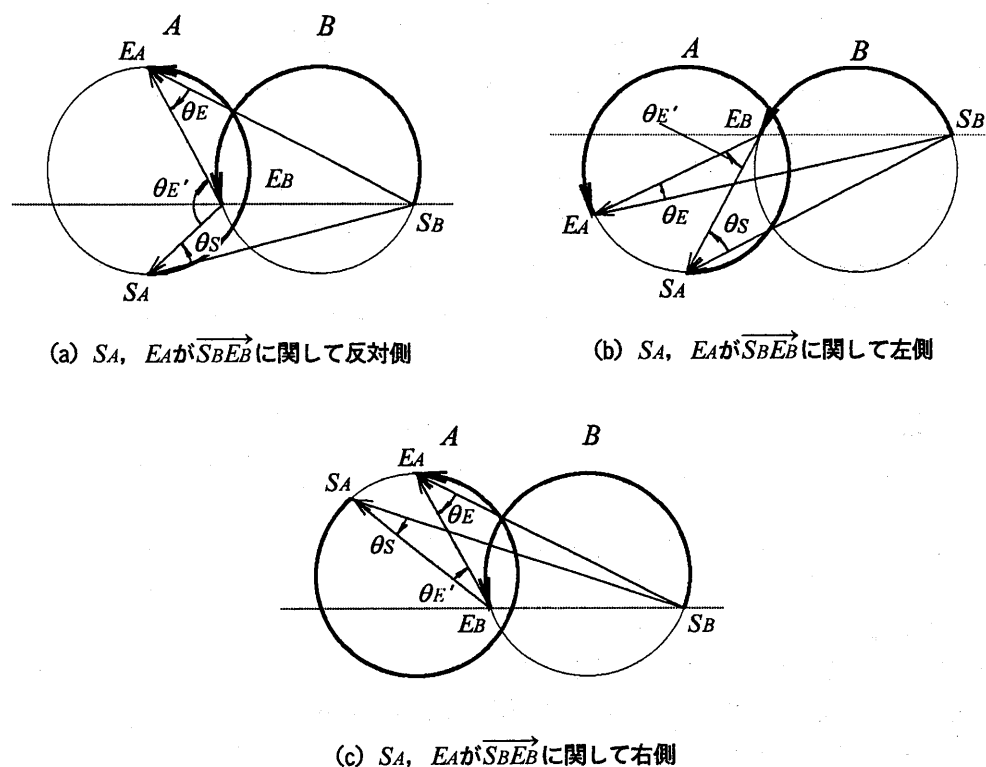


図6 交点数0/1の配置で交差する例

\overrightarrow{SAEB} と \overrightarrow{EAEB} がなす角を θ_E' とする. 各 θ の取り得る範囲は $-\pi < \theta < \pi$ である.

図6の配置に対して, 円弧Aをその補集合としての円弧で置き換えると交差は生じない. この置き換えの可能性に制限を与え, 図6の配置を確定するものが, 以下に示す交差条件である.

(a)の配置が成り立つためには, θ_S が正, θ_E が負であること (θ_E' は正または負になる可能性があるのに条件に含まれない). (b)の配置が成り立つためには, θ_S , θ_E が共に正で θ_E' が負であること. (c)の配置が成り立つためには, θ_S , θ_E が共に負で θ_E' が負であること.

上記の条件を次のように言い換える.

$$\sin \theta_S > 0 \quad \text{かつ} \quad \sin \theta_E < 0, \quad (6)$$

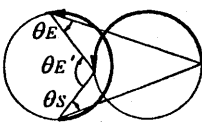
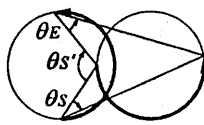
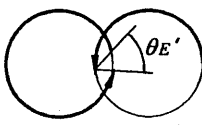
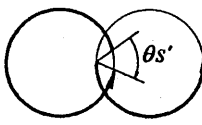
または

$$\sin \theta_S \sin \theta_E > 0 \quad \text{かつ} \quad \sin \theta_E' < 0. \quad (7)$$

式(6)と(7)の $\sin \theta$ の符号は式(3)の分母の符号としてすでに求められたものを利用する.

残りの組合せに対する交差条件も同様に求めることができ, その結果を表2にまとめる.

表2 交点数0/1の配置における交点数の決定

Combinations in table 1	①-②', ②-①'	①-③', ③-①'	④-②', ②-④'	④-③', ③-④'
				
Conditions of Intersection	$\sin \theta_S > 0$ and $\sin \theta_E < 0$, or $\sin \theta_S \sin \theta_E > 0$ and $\sin \theta_E' < 0$	$\sin \theta_S < 0$ and $\sin \theta_E > 0$, or $\sin \theta_S \sin \theta_E > 0$ and $\sin \theta_S' < 0$	$\sin \theta_E' < 0$	$\sin \theta_S' < 0$

3. 4 円弧の端点が他方の円上にある場合

図7に示した二つの円AおよびBに, 円弧AおよびBがそれぞれ埋め込まれていると考える. 円弧がどこに埋め込まれているかによって, 二つの円弧の交点数は2, 1, 0のいずれかになる. しかし本節の対象の配置では, 交点数2はありえない. その理由は, PとQで交差が生じるためには二つの円弧の端点はすべてP, Q以外の位置になければならず, その様な配置は本節の対象外だからである. 従って交点数1, 0の配置を捜すことにする. 交差判定を行う際は, 当該の円弧同士がこの節で示す配置に相当するかどうかを調べればよい.

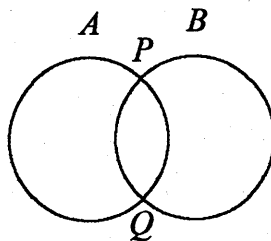


図7 交わった二つの円

3. 4. 1 交点数が1になる配置

まず図7におけるPの位置に交点ができる場合を考える. そうすると, 例えば, 円弧Aは, 一つの端点がQの位置に, 残りの端点が円Bの内側か外側にあつて, かつPを通るようなものでなければならない. 円弧

Bについては、Pを通るものであれば、端点の位置はどこにあってもよい。これらの許される配置と、AとBの立場を入れ換えてできる同様な配置との組合せにより、Pの位置にのみ交点ができる明確な配置を得ることができる。表3にそれらを示す。この表の右下の空白欄は、3.2節で扱った配置であるために省略してある。また、各欄において右下隅に記入した*や**は次のことを意味する。

* : 二つの円弧の端点同士が重なっている。

** : 一方の円弧の端点が他方の円弧の（端点以外の）上に重なっている。

前者は端点同士の座標を直接比較することにより、また、後者は3.1節末尾で述べた方法により、検出することができる。これらの重なりは退化と呼ばれるが、退化が生じたときは、図形全体を微小量移動して交差判定をやり直すなどの対策をとればよい。

表3において*や**の付いていない四つの欄では、退化を生じていないので、求める配置である。端点が補集合としての円弧上にあるかどうかは3.1節末尾の方法を用いる。

さて、図7のQの位置にのみ交点ができる場合については、図7の配置を180°回転してAとBを交換した場合と全く同じであるから、円弧AとBの立場を交換して上記と同様の手順で処理すればよい。

表3 退化の配置において交点数が1になる場合

Positions of terminal points of arc B Positions of terminal points of arc A		One of the terminal points is on Q		Both of the terminal points are in the normal position		
		A B 	A B 	A B 	A B 	A B
One of the terminal points is on Q	A B 					
	A B 					
Both of the terminal points are in the normal position	A B 			(Configurations correspondent to this part are discussed in section 3.2.)		
	A B 					
	A B 					

(* : Case of terminal point - terminal point overlap, ** : Case of terminal point - arc overlap)

3. 4. 2 交点数が0になる配置

退化を生じないで、一方の円弧の端点が他方の補集合としての円弧に重なり、かつ3.4.1項に当てはまらない配置全てが求めるものである。

提案の方式のフローチャートを図8に示す。

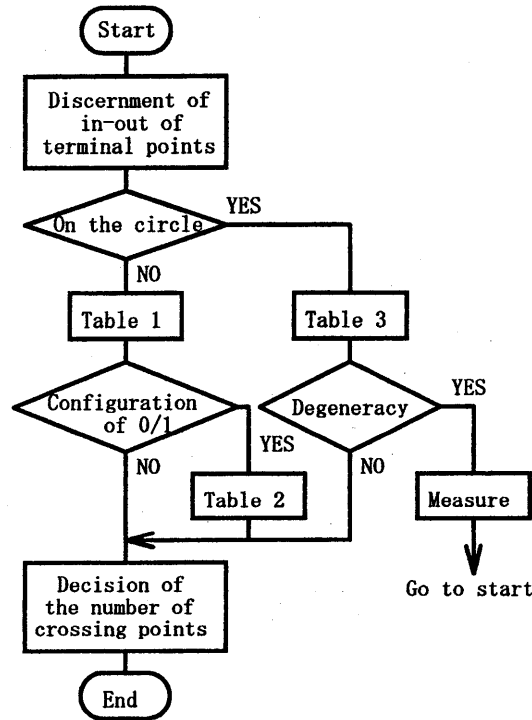


図8 提案の方式の処理の流れ

4. 矛盾発生の可能性について

前章で提案した交差判定法では、判定対象の二円弧が、交点数0の配置、交点数1の配置、交点数0/2の配置及び交点数0/1の配置のいずれに属するかを調べることによって交点数を決定する。この調査に必要とされるのは、一方の円弧の端点と他方の円弧の元の円との間の内外判定処理である。更に、二円弧が交点数0/1の配置に属する場合は、別に交点数を決定する処理が追加される。そこで4.1節では交点数0/1の配置について、4.2節以降ではその他の交点数の配置について、検討を行う。

なお、退化が生じた場合は3.4.1項で述べた退化回避策をとることとし、以降の検討では退化の生じる場合をあえて取り上げない。

4. 1 交点数0/1の配置

この節では、交点数0/1の配置における判定の追加処理に関する問題を扱う。誤差のために判定を誤る可能性が高い配置の例を図9に示す。これらは、前章の表2の各 θ に対する正弦の絶対値が非常に小さい場合の配置である。(a)及び(b)は円弧Pの両端点が非常に接近しており、各 θ が0に非常に近い場合を、(c)は円弧Aの両端点が非常に接近しており θ_{PS} と θ_{PE} が0に非常に近い場合を、(d)は円弧Pの両端点が円弧Aの弦の延長線に関して同じ側にあり、かつ θ_P が $-\pi$ に非常に近い場合を示す。(d)では円弧Aの終点は円弧Pの弦に非常に接近している。これらの配置においては、誤差のために各 θ の正弦の符号が本来のものと逆になり、円弧Pがそれ自身の補集合としての円弧とみなされ、誤判定の結果、交点数に関して矛盾が生じる可能性がある。

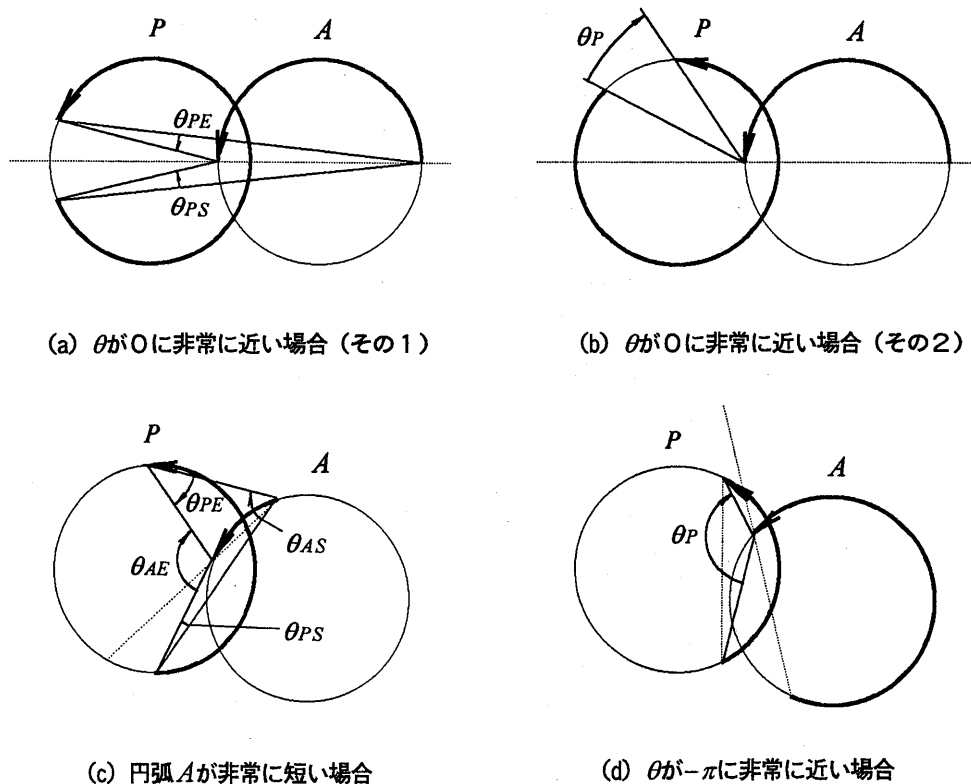


図9 交点数0/1の配置での誤判定の例

但し(c)の場合、 θ_{AS} と θ_{AE} は円弧Pの円周角とほとんど等しく、そのため円弧Aがその補集合としての円弧であるかのように判定されるときも、交点数は本来と同じく1になるので問題は生じない。

上記の誤判定によっても、交点数の矛盾が生じないこともある。例えば図10のような配置の場合は、 θ_A は円弧AとP、円弧AとQの各交差判定において共通に使用される。従ってそれぞれの交差判定の結果は同じになり、 θ_A の正弦の符号が負なら交点総数は2に、正なら円弧Aはその補集合としての円弧とみなされ交点総数は0になる。どちらの場合でも矛盾は生じない。

図9(a)~(c)の問題は円弧の両端点が非常に接近していることに起因するので、以下の対策を提案する。すなわち、図形全体の接続関係を保ちながら、極端に短い円弧は削除し、ほとんど円に近い円弧は適当な

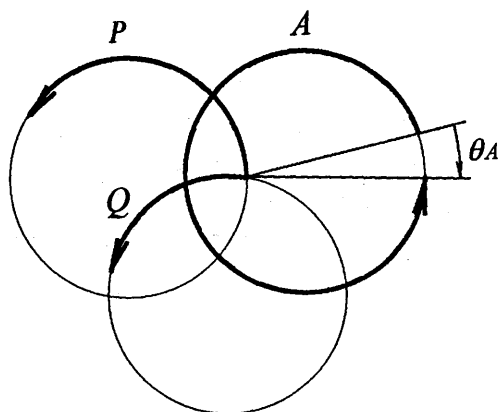


図10 交点数に矛盾が生じない例

大きさの中心角を持つ二つの円弧に分割する。この処理は全ての交差判定の前に行う。

(d)の問題は未解決であるが、その配置は複数の円弧がとり得る様々な配置の中では極めて希であるので、矛盾が生じる可能性は非常に低いと思われる。次節以降では、この配置が起きないと仮定して議論する。

4. 2 その他の交点数の配置

誤差の影響が顕著になるのは、円弧の端点の内外判定における状況変化の分かれ目付近であると考えられる。すなわち、式(4)、(5)から、

$$\sin \theta \approx 0, \quad (8)$$

$$\cot \theta \approx \cot \phi. \quad (9)$$

のいずれかが成り立つ場合である。ここで、式(8)は、両端点が接近した円弧、すなわち円又は点に近い円弧の場合を意味する。また式(9)は、円弧の端点が相手の円に接近する場合を意味する。式(9)は更に次の3つの場合に分類される。すなわち、一方の円弧の端点が他方の円弧（の端点以外の部分）に接近した場合、二つの円弧の端点同士が接近した場合、及び、一方の円弧の端点が他方の円弧の補集合としての円弧に接近した場合である。ここで、第一の場合を端点-円弧接近、第二の場合を端点-端点接近と呼ぶことにする。

これらの各場合では、誤差の影響が顕著であるため、本来とは異なる判定結果となる可能性がある。以降の節では、上記の各場合について、矛盾の発生の可能性を調べる。

4. 3 円又は点に近い円弧の場合

本節では、交点数0/1の配置を除く以下の三配置に対する問題と対策を説明する。はじめに交点数1の配置と交点数0の配置、次に交点数0/2の配置について考える。

まず図11(a)のように、本来、二つの円弧AとPが交点数1の配置をとり、円弧Aの両端点が非常に接近していると仮定する。この時、 θ_{PS} と θ_{PE} は0に非常に近いので、円弧Pの始点、終点に関する内外判定を誤る恐れがある。2点とも誤判定した場合を同図(b)に示す。また θ_{AS} と θ_{AE} は円弧Pの円周角にほとんど等しいので、円弧Aの始点、終点に関しても内外判定を誤る恐れがある。2点とも誤判定した場合を(c)に示す。更に、両方の円弧の全ての端点の内外判定を誤った場合を(d)に示す。(b)及び(c)は交点数0の配置、(d)は交点数1の配置になっている。従って、本来の配置(a)が(b)又は(c)とみなされるなら交点数が変わり矛盾が生じる恐れがある。(a)以外を本来の配置と仮定した場合についても同様のことがいえる。結局、(a)と(d)相互間、(b)と(c)相互間の誤判定に限り矛盾は生じないが、どのような誤り方をするかは誤差に依存するので、交点数の無矛盾性は保証されない。なお、一方の円弧の一つの端点だけが内外判定を誤った場合は、交点数0/1の配置になり、4.1節での議論が適用される。

次に、二つの円弧AとPが交点数0/2の配置をとり、円弧Aの両端点が非常に接近している場合を考える(図12(a)参照)。このとき、 θ_{PS} と θ_{PE} は0に、円弧Aの円周角は $-\pi$ に非常に近いので、円弧Pの始点、

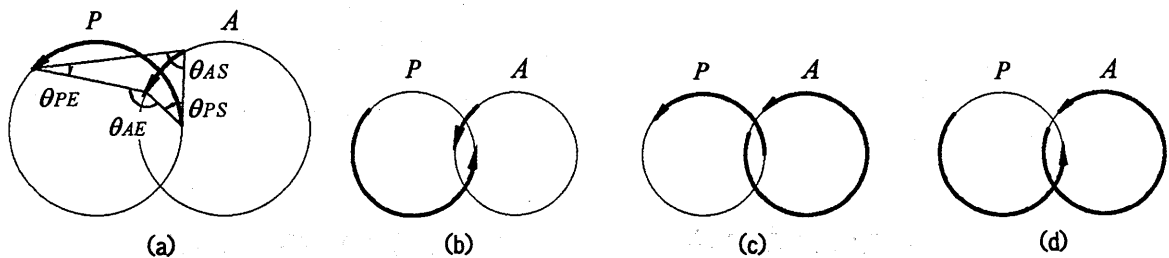


図11 交点数1の配置における誤判定の例

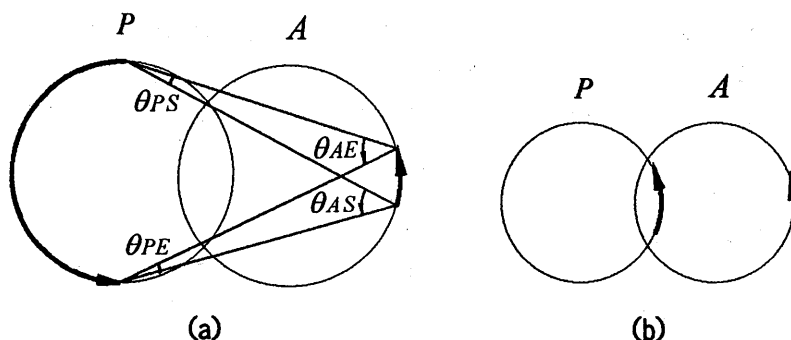


図12 交点数0/2の配置における誤判定の例

終点の内外判定を誤る恐れがある。ここで円弧Pの片方の端点だけが内外判定を誤った場合は、交点数0/1の配置になり、4.1節での議論が適用される。しかし、同図(b)のように、円弧Pの二端点が共に本来と逆の位置関係にあると判定される場合は、はじめと同じ交点数0/2の配置になるので問題ない。

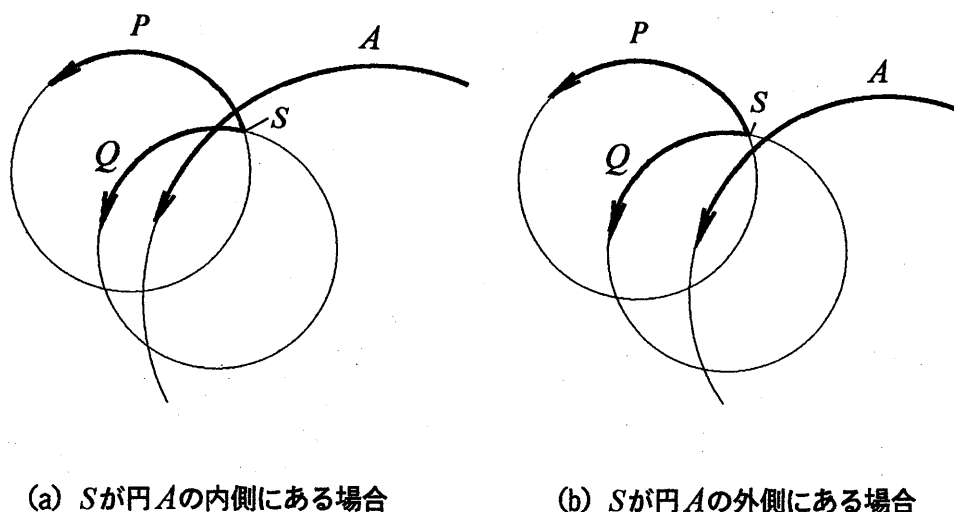
また、円弧Aが円Pに非常に接近しているときは、(a)に示した θ_{AS} と θ_{AE} とは円弧Pの円周角にほとんど等しく、円弧Aの始点、終点の内外判定を誤る恐れがある。このときも上記と同様の結論が得られる。

以上により、円弧の始点と終点が接近している場合は、判定の誤り方に応じて交点数に矛盾が生じる可能性がある。4.1節と同様の対策を施す必要がある。この対策によって、本節で示した問題は解決される。

4. 4 端点—円弧接近の場合

円弧Aだけから成る図形と、連結された二つの円弧P及びQから成る図形との交差判定を考える。図13に示すように、円弧Aの始点は円P及びQの外側に、終点は円P及びQの内側にあるものとする。また、円弧PとQは点Sで連結され、これらの円弧の終点は共に円Aの外側にあり、Sは円弧Aに接近しているとする。この時Sのとり得る位置は円Aの内外いずれかであり、各場合の円弧の配置を同図(a)及び(b)に示す。図からわかるように、許される交点の総数は0または2であり、もしも交点数が奇数なら矛盾が生じている。

従来の方式では、円弧AとP、円弧AとQの各交差判定をそれぞれ独立に行い、そのために交点総数に矛



(a) Sが円Aの内側にある場合

(b) Sが円Aの外側にある場合

図13 端点—円弧接近の例

盾が生じることがあった。例えば円弧AとPは交差するが円弧AとQは交差せず、交点総数が1となる場合などである。提案の方式では以下に示す理由により矛盾は生じない。まず図13(a)のように、Sが円Aの内側にあると仮定すると、円弧AとP、円弧AとQのいずれも交点数1の配置になっているので交点総数は2となる。一方、同図(b)のようにSが円Aの外側にあるとすると、円弧AとP、円弧AとQのいずれも交点数0/1の配置になっているが、この図の配置に関する限り交点数はいずれも0であり、交点総数は0となる。以上により交点総数に矛盾は生じない。

提案の方式では、Sと円Aとの位置関係は誤差に依存するが、交点総数の無矛盾性は誤差と無関係に成り立つ。誤差は、図13(a)、(b)のいずれを採用するかを左右するだけであり、矛盾の発生に寄与しない。

上記の議論は、図13における円弧Aの始点、終点、円弧Pの終点、及び円弧Qの終点が、図示された以外の位置にある場合にも適用でき、やはり矛盾は生じない。

4. 5 端点—端点接近の場合

連結された二つの円弧A及びBから成る図形と、連結された二つの円弧P及びQから成る図形との交差判定を考える。図14の配置において、それぞれの連結点S及びTが接近しており、それらを除く円弧の端点は、誤差の問題が起きない程度に十分離れているものとする。Sの位置に注目する。Sが、円PとQによって作られるI～IVのいずれの領域に存在するかは誤差に依存する。更に、円PとQがわずかの交わりしか持たない場合は、SはVで示された付近に存在する可能性もある。

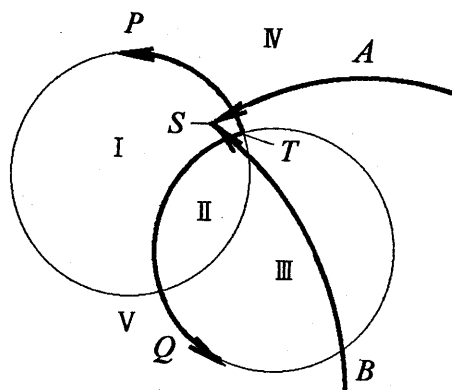


図14 端点—端点接近の例

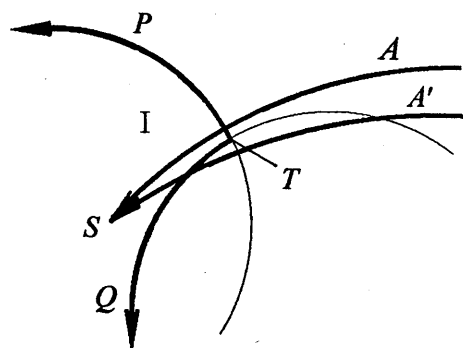


図15 Sが領域Iに存在する場合

さて、Sが領域Iにあると判定されたと仮定する(図15参照)。このとき、円弧AとP、及び円弧AとQの各交点数は、Tと円Aとの位置関係に依存する。すなわち、Tが円Aの内側にあるなら(同図において円弧Aの場合)円弧AとPとの交点数は1、円弧AとQとの交点数は0または2となり、Tが円Aの外側にあるなら(同図において円弧A'の場合)円弧AとPとの交点数は0、円弧AとQとの交点数は1となる。従って円弧Aと、円弧P及びQとの交点数は、前者の場合1または3、後者の場合1となる。交点数が3となる配置は図16のように解釈される。円弧Bと、円弧P及びQとの交点数も同様の結果になり、従って二つの図形の交点総数は2、4、6のいずれかをとる。これらはいずれも矛盾を生じない。

上記の議論は、図14に示したII～Vのいずれかの領域にSがある場合にも、また、円弧A、Bの始点、円弧P、Qの終点が図示された以外の位置にある場合にも適用でき、やはり矛盾は生じない。

4. 6 端点が補集合円弧に接近する場合

図17に示すように、円弧P、Qの共通の始点Sが円弧Aの補集合としての円弧A'に非常に接近しているとす。Sが円Aの内外いずれにあってもSの近傍では交点ができないから、交点総数が誤差によって変わる

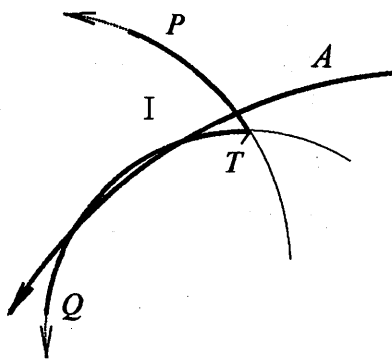


図16 交点数が3になる場合

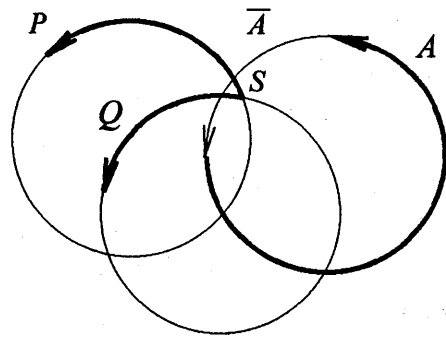


図17 S が補集合の円弧に接近する場合

ことはない。この図の配置の交点総数は0であり、矛盾が生じないことは図17から明らかである。上記の議論は、円弧Aの両端点、及び円弧P、Qの終点の位置が、図示された以外の位置にある場合にも適用でき、やはり矛盾は生じない。

5. 実験による従来方式との比較

矛盾の発生の可能性について、従来方式と提案の方式との実験比較を行う。実験は、誤差の影響が顕著になると考えられる二つの場合、すなわち、端点—円弧接近の場合、及び端点—端点接近の場合について行った。使用した計算機は、NEC PC-9821Bs (OSはMS-DOS Ver.5.0) 及びオムロンデータゼネラル MV-15000 (OSはAOS/VS) である。始めにPCで作ったプログラムをMVに移植し、それぞれの環境で実験を行った。C言語を用い、数値計算は全て倍精度浮動小数点方式で行った。実験の主旨に従い、退化が発生した箇所は無視することにした。従ってその箇所については、退化回避策を行わずに交差判定処理を打ち切り、交点数を0とした。なお、交差判定処理部のプログラムサイズは、従来方式で約230行、提案の方式で約460行である。

5. 1 実験対象の図形

5. 1. 1 端点—円弧接近の図形

実験対象となる二つの図形A及びBは、図18に示すように複数の円弧から構成される。図形Aは、調整可能な半径を持つ円に内接している。この円がx軸の正の部分と交わる点を図形Aの始点 S_A とし、この点から、 n 等分した外接円上の点を反時計回りに順次拾いながら、原点に対して凸の円弧でつないでゆき、 S_A の位

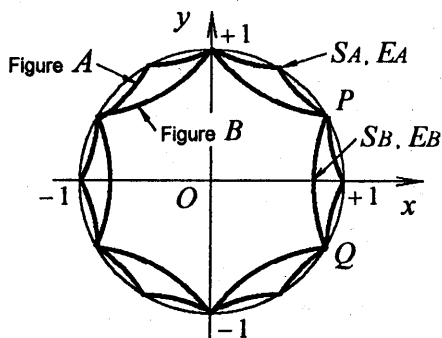


図18 端点—円弧接近の実験対象図形

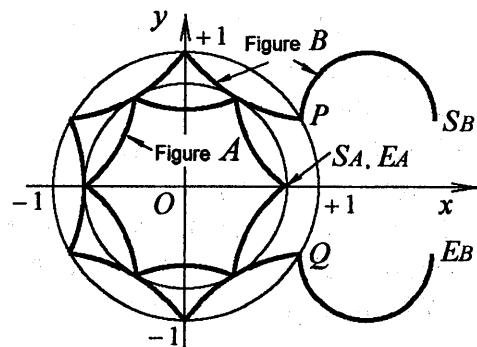


図19 端点—端点接近の実験対象図形

置まで戻ったところを終点 E_A とする。各円弧の半径は、すべて図形 A の外接円の半径と等しくおく。図形 A は $n+1$ 個の頂点、 n 個の円弧からなる。図形 B は次のように作る。座標原点を中心とする単位円を想定し、点 $(1,0)$ を基準にして円周を $2n$ 等分に分割する。基準の点からそれぞれ反時計回り及び時計回りで一つ目の点(図18に示す点 P 及び Q)からそれぞれ x 座標が1だけ大きい位置に始点 S_B 及び終点 E_B を設ける。そして S_B と P 、 E_B と Q をそれぞれ上に凸及び下に凸の半径 $1/2$ の半円で結ぶ。更に、単位円上の分割点を P から反時計回りに一つおきに Q まで拾いながら、原点に対して凸の円弧でつないでゆく。各円弧の半径はすべて1とする。図形 B は $n+2$ 個の頂点、 $n+1$ 個の円弧からなる。

図形 A の外接円の半径は次の5段階とした。すなわち、図形 A が B に接する理論上の半径 R_0 、及び $R_0 \pm 10^{-16}$ 、 $R_0 \pm 10^{-16}$ である。 n は、図形 A の外接円の各半径ごとに、4, 5, ..., 18の15通りとした。

5. 1. 2 端点—端点接近の図形

図19に図形 A と B の配置例を示す。図形 A は、調整可能な半径を持つ円に内接している。まず、この円と x 軸の正の部分との交点から、 $2n$ 等分した外接円上の点を反時計回りに順次拾いながら、始めの位置に戻るまで原点に対して凸の円弧でつないでゆく。次にこの図形を、原点に対して反時計回りに2頂点分だけ回転させる。回転の理由は、その計算誤差を利用して図形 A と B の端点同士をわずかに離すためである。各円弧の半径はすべて外接円の半径と等しくおく。図形 A は始点 S_A 、終点 E_A 、 $2n+1$ 個の頂点、 $2n$ 個の円弧からなる。図形 B としては、前項の場合と同様の手順で用意した単位円上の分割点を、反時計回りに一つおきに、原点に対して凸の円弧でつないだ図形とする。但しその始点 S_B 及び終点 E_B は x 軸の正の部分と交わる位置にとる。各円弧の半径はすべて1とする。図形 B は $n+2$ 個の頂点、 $n+1$ 個の円弧からなる。 S_B と E_B を図形 A の内側に配置した理由は、図形 A と B とが双方の端点を貫通して相互に交わることがないようにするためである。本章のはじめに述べたように、退化発生時には交点数を強制的に0としたので、上記の必要が生じた。

図形 A の外接円の半径および各段階における n 値は、前記(a)と同様に設定した。

5. 2 実験結果による比較

図形 A と B との全ての接近箇所において、交点数に矛盾が生じるような判定結果が得られていないかどうかを調べた。但し、退化が生じている箇所は無視した。その結果、従来方式ではいくつかの接近箇所で見られるような矛盾が生じた。同図は本来偶数であるべき交点数が奇数となった状況を示している。

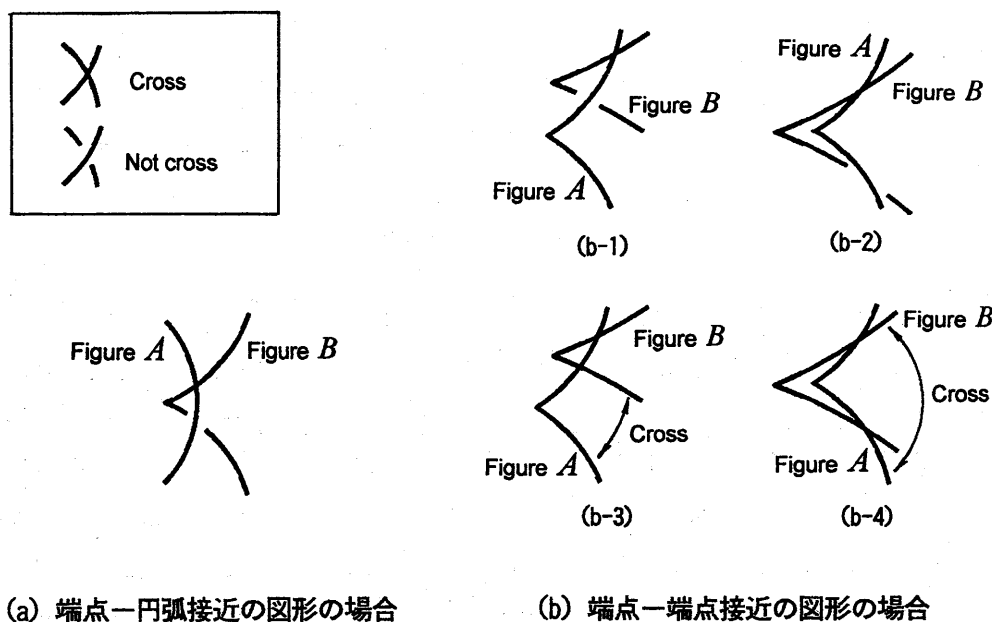
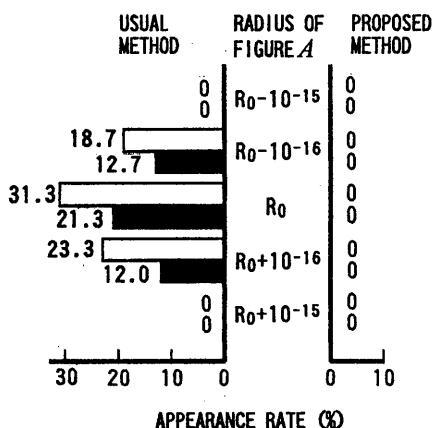
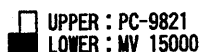
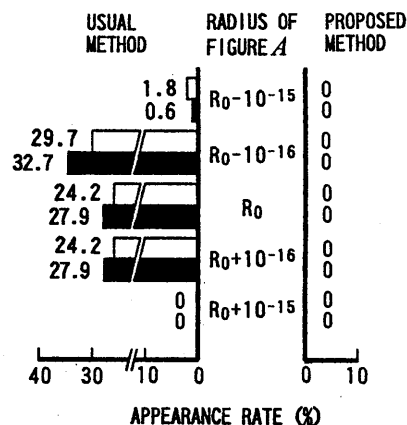


図20 矛盾が生じる箇所の判定状況



(a) 端点一円弧接近の図形の場合



(b) 端点一端点接近の図形の場合

図21 矛盾が生じる箇所の出現頻度

図形Aの外接円の半径の各段階に対して、上記の矛盾が生じる箇所の出現頻度を図21に示す。縦軸は図形Aの外接円の半径を表し、横軸は出現頻度を、矛盾が生じる箇所の総数の、接近箇所の総数（(a)の場合150、(b)の場合165）に対する百分率で表わす。

図から明らかなように、従来方式では、図形Aが図形Bに理論上接する時、若しくはその付近において矛盾が発生している。これに対し、提案の方式では矛盾が全く発生していない。

6. 計算量について

円弧の定義データとして、中心、半径及び両端点の座標が最初に与えられるとする。従って提案の方式には、交差判定処理だけでなく円周角 ϕ_0 の余接 $\cot \phi_0$ を求める処理も含まれるとする。円弧の個数を n とすると、提案の方式では、交差判定のみの計算量は円弧対の数に比例して $O(n^2)$ 、 $\cot \phi_0$ を求める計算量は円弧の数に比例して $O(n)$ であり、 n が大きくなるに従い全体の計算量は $O(n^2)$ に近づく。一方、従来の方式は交差判定処理だけであるから計算量は $O(n^2)$ である。この傾向は各方式に対する計算量の見積り結果を示した表 4 から認められる。またこの表から、提案の方式の計算量は従来の方式に比べて少ないことがわかる。両者の比は、 n の増大に伴い収束し、その極限值は、加減算で 0.6、剰算で 0.48、除算で 2.0、平方根算で 0 である。

表4 計算量の比較

Number of arcs	FigureA:1 FigureB:1 <u>Sum 2</u>		FigureA:9 FigureB:9 <u>Sum 18</u>		FigureA:18 FigureB:18 <u>Sum 36</u>	
Number of pairs	1×1=1		9×9=81		18×18=324	
Calculation Method	Usual	Proposed	Usual	Proposed	Usual	Proposed
Addition	48	37	3888	2421	15552	9540
Multiplication	40	27	3240	1611	12960	6300
Division	2	6	162	342	648	1332
Square root	1	2	81	18	324	36

7. むすび

交点数の無矛盾性が保障される線分同士の交差判定方式に注目し、これを応用した円弧同士の新しい交差判定方式を提案した。この方式では、円弧の端点と相手の円弧の元の円との位置関係だけから交差判定が行える。次に提案の方式に対して、交点数に矛盾が生じる可能性を調べ、矛盾発生の可能性がきわめて低いことを明らかにした。また、提案の方式と従来方式とを実験によって比較し上記の妥当性を確認した。更に提案の方式では計算量が少ないことを示した。以上から提案の方式は、計算誤差対策のうえで有用であると考えられる。

提案の方式は、あらかじめ与えられた図形同士の交差の可能性を判定するだけである。しかし、隠線消去や図形の集合演算など多くの図形処理では、トポロジーに矛盾を生じないように交点の位置を求める必要があるので、この方式と交点の生成処理との融合が望まれる。これは、線分同士の交差判定については報告済みであるが⁷⁾、円弧に関しては今後の課題である。また、提案の方式を線分と円弧の混合図形同士の交差判定に応用する可能性も考えられ、現在検討中である。

謝 辞

本研究を進めるにあたりご協力頂いた(株)富士通九州システムエンジニアリングの井上 和取締役部長、同社東京事業所川田 敏郎所長、同社鳥巢 正治社員、および熊本工業大学賛田 寛教授に深謝します。なお、本研究費の一部は宮崎学術振興財団助成金により行われたものである。ここに記して、謝意を表する。

参考文献

- (1)大沢 晃: "計算誤差による暴走のない図形演算アルゴリズム: スペースモデルによる実現", 情処学論, 31,1, pp.42-55(1990-01).
- (2)杉原 厚吉, 伊理 正夫: "計算誤差による暴走の心配のないソリッドモデラの提案", 情処学論, 28,9, pp.962-974(1987-09).
- (3)稲垣 宏, 杉原 厚吉, 杉江 昇: "3次元ボロノイ図構成のための数値的に安定な逐次添加法", 情処学論, 35,1, pp.1-10(1994-01).
- (4)金子 正光, 辻 利則, 河野 俊弘, 鳥巢 正治, 中山 泰雄: "二つの交差判定方式における計算誤差の影響と対策の比較", 宮崎公立大学人文学部紀要論文, 2,1, pp.97-107(1994).
- (5)河野 俊弘, 金子 正光, 辻 利則, 鏡山 英二, 中山 泰雄: "計算誤差対策を重視した円弧同士の交差判定法", 信学技報, IE94-120, pp.21-28(1995-01).
- (6)河野 俊弘, 金子 正光, 辻 利則, 鏡山 英二, 中山 泰雄: "円弧同士の交差判定法の計算誤差に関する検討", 情報処理学会九州支部研究会報告, 7-4-2, pp.108-117(1995-03).
- (7)河野 俊弘, 金子 正光, 辻 利則, 中山 泰雄: "位相構造が破壊されにくい図形集合演算法", 平7九州連大, 1230, p.756(1995).

所属・氏名

金子 正光 辻 利則

(宮崎公立大学)

河野 俊弘

(北九州高専・非常勤講師)

鏡山 英二

(株)富士通九州システムエンジニアリング)

中山 泰雄

(熊本学園大学)

