2 期間政権と公的年金制度

Two-period-continued Governments and Pay-as-you-go Pension Systems

久　保　和　華

目　次

1　はじめに

従来のＯＬＧモデル下で最適政策を論じる先行研究で仮定されている無限視野の政府は，各期間政策をコントロールして無限期間の最適政策を導いている．つまり，政府は政策を毎期コミットメントしている．しかし，現実には，公的年金制度や介護保険制度などの社会保障制度は賦課方式の財源調達であることと被保険者が公的年金制度の対象となる期間が長いことを考慮すると，公的年金保険料や公的年金給付金の公的年金政策は公的年金制度の被保険者が加入者，受給者として存在する期間内は一貫性をもった政策であることが要求される．

そこで，本稿では，2 期間政権を仮定して，開放小国経済下の 2 期間生存joy-of-giving型双方向性利他性ＯＬＧモデルの中で，世代ごとの意思決定をモデル化した 2 期間政権の公的年金政策について定常状態において分析する．つまり，世代の公的年金政策に関する主張を反映する政府である場合について考察を行なう．ここでｔ期における 2 期間政権とは，ｔ期に勤労世代であるｔ世代から支持を得てｔ世代が勤労期のｔ期と引退期のｔ＋１期に一貫した公的年金政策を実施する政府であるとする．つまり，2 期間政権とは公的年金政策に 2 期間コミットメントする政府である．

このｔ期における 2 期間政権の公的年金政策は，3 通り考えられる．第 1 のケースはｔ－１世代の給付金つまりｔ世代の年金保険料を所与としてｔ世代の給付金を決定する政策，第 2 のケースはｔ世代の年金保険料とｔ世代の給付金を決定する政策，第 3 のケースはｔ世代の年金保険料を決定しｔ世代の給付金はｔ＋１世代の政権によって決められ所与である政策である．本稿では賦

課方式を前提としているので積立方式である第２のケースは扱わない．第３のケースは第１のケースと政策時期が勤労期か引退期かという相違のみであろうと予想されるので，本稿では第１のケースのみを考察することにする．つまり，本稿のｔ期における２期間政権は，ｔ期のｔ世代の年金保険料すなわちｔ－１世代の給付金はｔ－１期における２期間政権によって決定されてｔ期に実現されるので，ｔ期にｔ世代は自分達の給付金つまりｔ＋１世代の年金保険料を決定する．

本稿では，ｔ期における２期間政権は，勤労期のｔ世代と自分達の年金保険料を支払ってくれるｔ＋１世代の二つの世代を政策ターゲットとして最適公的年金政策（最適公的年金保険料金）を定常状態において導出して分析する．そして無限期間の政府の下での最適公的年金政策と比較をする．

Samuelson（1958）やDiamond（1965）らによって展開されたＯＬＧモデルは，世代が明示されて世代交代するモデルであるため公的年金制度を取り扱うことができるが，モデルに登場する行動主体が世代の数だけ増加することから，理論的分析が複雑になる．Samuelson（1975）は，最適社会保障プログラムは自由放任主義政策均衡をすべての後に続く世代の生涯幸福を最大にする黄金律均衡に変えるので，一括税型移転を年金と解釈してpositiveな年金の理論論文とみなされている．年金制度に関する先行研究は多数あるが，最適年金政策の研究はほとんどなされていない．

藤井・林・入谷・小黒（2012）は利他性のないＯＬＧモデルを部分均衡によって最適性を考察しており，本稿が双方向性利他性のあるＯＬＧモデルを一般均衡によって最適年金政策を考察していることとは異なっている．

Michel and Pestieau（1999）は分権化での均衡と黄金律を比較して，定常状態におけるファーストベスト最適解に到達するためには，制限のない賦課方式移転と引退年齢の両方をコントロールすることが必要であることを示している．

本稿は，久保（2009）の枠組み，つまりMichel and Pestieau（2004）のjoy-of-giving型一方向性利他性２期間生存ＯＬＧモデルに，公的年金制度をもつ小国開放経済下で，子供から親への利他性と子供から親への（親の介護のための）家族内所得移転という利他的行動を導入して，子供から親への利他性と親から子供への利他性という双方向性利他性をもち自分の介護支出も導入して拡張したモデル，双方向性利他性２期間生存ＯＬＧモデルを，政府のコミットメントの期間が2期間である政権の仮定の導入のもとで，公的年金政策への世代ごとの意思決定を反映させるモデルとして展開したもので，当該世代の生存期間中の一貫した公的年金政策の実施に対する当該世代の意思を反映させる政治過程の一つのケースのもとで，従来の先行研究よりもより現実的な最適公的年金政策を分析していること，さらに双方向性利他性２期間ＯＬＧモデル下の従来型の毎期政策をコントロールする無限視野の政府の場合の最適公的年金政策を分析している．

政府は世代の勤労期（すなわち公的年金制度の加入期）と引退期（すなわち公的年金制度の受給期）の公的年金政策の組合せについての主張を政策として実現する政府つまり２期間政権であると仮定して，公的年金制度下の双方向性利他性２期間ＯＬＧモデルを世代の意思決定モデルとし

て拡張展開して定常状態における最適公的年金政策を分析している論文は他に存在しない．

本稿の構成は以下の通りである．次節では開放小国経済下で賦課方式年金制度下の均衡を導出する．第 3 節では 2 期間政権の最適公的年金について賦課方式年金制度下で動学過程を記述して長期的な最適公的年金政策を導出して分析をする．第 4 節では無限視野の政府の下で長期における最適公的年金政策を導出して定性分析をする．最後に得られた主要な分析結果をまとめて今後の課題について言及する．

2　賦課方式公的年金制度下の主体均衡

2.1　家計

開放小国経済下で 2 期間生存の家計について述べる． t 期には老年期の t － 1 世代がL_{t-1}人（既知），若年期の t 世代がL_t人（既知）存在する． t 世代は t 期に働き， t ＋ 1 期は引退する． t 世代の家計は t 期に親から前期決定変数の遺産x_t^{t-1}をもらい〈内生変数の上添文字は世代, 下添文字は期を表わす．期と世代が同じである場合は下添文字のみと表わす.〉，非弾力的な労働供給を行なって稼得所得 w（given）を得て，保険料金 θ_t を徴収される． θ_t は t －1政権の政策変数であり，家計にとってはgivenである．可処分所得を若年期の消費c_t, 貯蓄s_t， t －1世代（親世代）への私的家族内所得移転m_t にふりわける． c_t, s_t, m_tは t 世代の家計の内生変数である．そして t ＋ 1 期には所与の外国の利子率 r の下で，貯蓄収益（1＋r） s_t と支払われる公的年金給付金 τ_{t+1}と子供 1 人当たりの私的家族内所得移転の予想m_{t+1}^e を子供から受け取る． t 世代の家計はm_{t+1}^e をgivenとして扱う．人口成長率 n も定数でgivenとする．そして老年期の消費d_{t+1}^t とgivenの介護のための消費Mと 1 人の子供（ t ＋ 1 世代）への 1 人あたりの遺産 x_{t+1}^t にふりわける． d_{t+1}^t とx_{t+1}^t は内生変数である．

t 世代の家計の効用関数は，以下の対数関数に特定化する．

$$u_t = \log c_t + \beta \log d_{t+1}^t + a \log x_{t+1}^t + b \log m_t \tag{1}$$

である．ただし，aは t 世代が子供（ t ＋ 1 世代）を想う利他性の程度，bは t 世代が親（ t － 1 世代）を想う利他性の程度， β （ 0 ＜ β ＜ 1 ）は家計の割引率を表わしている．

t 世代家計は，所得 w, 利子率，年金政策（年金保険料金 θ_t, 年金給付金 τ_{t+1})，親から受け継いだ遺産x_t^{t-1}，介護のための消費M, 人口成長率n, 子供から移転される家族内所得移転の予想値m_{t+1}^e を所与として，以下の若年期，老年期の予算制約の下で，生涯効用を最大にするように，若年期の消費c_t, 老年期の消費d_{t+1}^t， t － 1 世代（親世代）への私的家族内所得移転m_t, 子供（ t ＋ 1 世代） 1 人あたりの遺産 x_{t+1}^t を決定する．

$$w + x_t^{t-1} - \theta_t = c_t + s_t + m_t \tag{2}$$

$$(1+r)s_t + \pi_{t+1} + (1+n)m_{t+1}^e = d_{t+1}^t + (1+n)x_{t+1}^t + M \tag{3}$$

$$(1+n)\theta_{t+1} = \pi_{t+1} \tag{4}$$

賦課方式公的年金の政府予算制約式$\pi_t = \frac{L_t}{L_{t-1}}\theta_t = (1+n)\theta_t$より得られた（4）式は家計にとっての賦課方式公的年金の政府予算である．（2），（3）と（4）から生涯予算制約式は

$$w + x_t^{t-1} - \theta_t = c_t + \frac{1}{1+r}\{d_{t+1}^t + (1+n)x_{t+1}^t + M - (1+n)\theta_{t+1} - (1+n)m_{t+1}\} + m_t$$

である．ｔ世代家計の生涯効用最大化の一階条件は，

$$c_t = \frac{1}{b}m_t \tag{5}$$

$$d_{t+1}^t = \frac{\beta(1+r)}{b}m_t \tag{6}$$

$$x_{t+1}^t = \frac{a(1+r)}{b(1+n)}m_t \tag{7}$$

$$m_{t+1} - \frac{(1+r)(1+\beta+a+b)}{b(1+n)}m_t + \frac{a(1+r)^2}{b(1+n)^2}m_{t-1} = -\frac{(1+r)}{(1+n)}\left(w - \theta_t - \frac{M}{1+r} + \frac{1+n}{1+r}\theta_{t+1}\right) \quad (8)^{[1]}$$

である．（8）は生涯予算制約式に（5），（6）と（7）を代入して導出している．最大化の二階の十分条件は$b(1+b) > \frac{1}{a}$である．(8)を再掲すると，

$$m_t = \frac{b(1+n)}{(1+r)(1+\beta+a+b)}\left\{m_{t+1} + \frac{a(1+r)^2}{b}m_{t-1} + \frac{(1+r)}{(1+n)}\left(w - \theta_t - \frac{M}{1+r} + \frac{1+n}{1+r}\theta_{t+1}\right)\right\}$$

である．子から親への私的家族内所得移転は，前期決定の私的家族内所得移転（given），子供から受け取るであろう私的家族内所得移転の予想値（given），家計にとって所与とみなしている政策パラメータθ_t，θ_{t+1}の関数$m_t = m_t(m_{t-1}, m_{t+1}, \theta_t, \theta_{t+1}, w, r)$となっている．ｔ世代の自分自身の若年期の消費と老年期の消費，子供へ残す遺産は，子から親への私的家族内所得移転の関数となっている．若年期，老年期の消費，子供へ残す遺産は，家族内所得移転の関数として表される．二つの利他性パラメータ（子供への利他性，親への利他性）が家族内所得移転に与える効果は以下の命題で与えられる．

命題１　前期決定の私的家族内所得移転と自分が受け取るであろう家族内所得移転の予想値，年金政策が与えられている時，子供への利他性は親への家族内所得移転を減少させ，親への利他性の増加は親への家族内所得移転を増加させる．

（**証明**）上式を a,b で偏微分すると，それぞれ

$$\frac{1+r}{1+n}(w-\theta_t-\frac{M}{1+r}+\frac{1+n}{1+r}\theta_{t+1})+m_{t+1}>\frac{(1+\beta+b)m_{t-1}}{b} \text{ ならば } \frac{\partial m_t}{\partial a}<0,$$

$$\frac{1+r}{1+n}(w-\theta_t-\frac{M}{1+r}+\frac{1+n}{1+r}\theta_{t+1})+m_{t+1}>\frac{a(1+r)^2m_{t-1}}{1+\beta+a} \text{ ならば } \frac{\partial m_t}{\partial b}>0,$$

$a=0$ の時，$\frac{\partial m_t}{\partial b}\big|_{b=0}>0$ を得る．（証明終わり）

３　２期間政権の最適年金政策

本節では，t 世代と t ＋ 1 世代を政策の対象としたターゲット関数にもとづいて，賦課方式公的年金制度の最適公的年金政策を考察する．そこで t 期における 2 期間政権の目的は t 世代の給付金つまり t ＋ 1 世代の t ＋ 1 期の年金保険料 θ_{t+1}をコントロールして t 世代と t ＋ 1 世代の家計を対象として社会厚生を最大にすることである．家計の効用関数は第 2 節より私的家族内所得移転の関数として表わすことができる．そこで，政府は t 世代家計の私的家族内所得移転$\widetilde{m}_t$と t ＋ 1 世代家計の私的家族内所得移転 $\widetilde{m}_{t+1}$の最適値を読み込んで，θ_{t+1}をコントロールして，t 世代の間接効用関数と t ＋ 1 世代の間接効用関数から構成される以下のターゲット関数W_t を最大にすることである．γは社会的割引率を表わしている．Meijdam and Verbon（1997）では，$(\gamma(n_t)+1)/(1+n_t)$を用いて政治力を表わし，$\gamma'(n_t)<0$ と仮定している．

$$\begin{aligned} W_t &= u_t(\widetilde{m_t})+\gamma u_{t+1}(\widetilde{m}_{t+1}) \\ &= (1+\beta+a+b)\log\widetilde{m_t}+a\log\frac{a(1+r)}{b(1+n)}+\beta\log\frac{\beta(1+r)}{b}+\log\frac{1}{b} \\ &+\gamma\,[(1+\beta+a+b)\log\widetilde{m}_{t+1}+a\log\frac{a(1+r)}{b(1+n)}+\beta\log\frac{\beta(1+r)}{b}+\log\frac{1}{b}] \end{aligned} \tag{9}$$

(9)は，

$$W_t=(1+\beta+a+b)\log(\widetilde{m_t}+\gamma\widetilde{m}_{t+1})+(1+\gamma)\{a\log\frac{a(1+r)}{b(1+n)}+\beta\log\frac{\beta(1+r)}{b}+\log\frac{1}{b}\} \tag{10}$$

である．したがって，

$$W_t=(1+\beta+a+b)(\log\widetilde{m_t}+\gamma\log\widetilde{m}_{t+1})+\text{定数} \tag{11}$$

と表わせる．政府の最大化問題は$\widetilde{W_t}=\log\widetilde{m_t}+\gamma\log\widetilde{m}_{t+1}$を θ_{t+1}をコントロールして最大化する問題となる．

$\widetilde{m_t}$，$\widetilde{m}_{t+1}$は，家計最大化からそれぞれ得られた t 世代の私的家族内所得移転m_tと， t ＋ 1 世代

の私的家族内所得移転m_{t+1}（m_tを１期後ろにずらした式）の連立方程式から得られた解（関数）である．$\widetilde{m_t}$，$\widetilde{m}_{t+1}$は，政府が読み込む家計の最適値である．

$$\widetilde{m_t} = \frac{A^2 m_{t+2} + Bm_{t-1} + G[(1+n)A\theta_{t+2} + \{1+n-(1+r)A\}\theta_{t+1} - (1+r)\theta_t + (1+A)X]}{1-AB} \text{ [2]} \quad (12)$$

$$\widetilde{m}_{t+1} = \frac{Am_{t+2} + B^2 m_{t-1} + G[(1+n)\theta_{t+2} + \{(1+n)B-(1+r)\}\theta_{t+1} - (1+r)B\theta_t + (1+B)X]}{1-AB} \text{ [2]} \quad (13)$$

である．

最大化の１階条件は

$$\frac{\partial \widetilde{W_t}}{\partial \theta_{t+1}} = \frac{1}{\widetilde{m_t}}\frac{\partial \widetilde{m_t}}{\partial \theta_{t+1}} + \frac{\gamma}{\widetilde{m}_{t+1}}\frac{\partial \widetilde{m}_{t+1}}{\partial \theta_{t+1}} = 0 \quad (14)$$

より

$$\frac{\widetilde{m}_{t+1}}{\widetilde{m_t}} = -\frac{\gamma(\frac{\partial \widetilde{m}_{t+1}}{\partial \theta_{t+1}})}{(\frac{\partial \widetilde{m_t}}{\partial \theta_{t+1}})} \quad (15)$$

が得られる．m_{t+2}，m_{t-1}はgivenであるので，（12）と（13）より

$$\frac{\partial \widetilde{m_t}}{\partial \theta_{t+1}} = \frac{\{(1+n)B-(1+r)A\}G}{1-AB} \quad (16)$$

$$\frac{\partial \widetilde{m}_{t+1}}{\partial \theta_{t+1}} = \frac{\{(1+n)B-(1+r)\}G}{1-AB} \quad (17)$$

となる．（15）に（12），（13），（16）と（17）を代入して

$$\begin{aligned}\widetilde{\theta}_{t+1} = &-\frac{(Z+\gamma HA)\{Am_{t+2}+(1+n)G\theta_{t+2}\}}{GZH(1+\gamma)} - \frac{(ZB+\gamma H)\{Bm_{t-1}-(1+r)G\theta_t\}}{GZH(1+\gamma)} \\ &-\frac{X\{\gamma H(1+A)\} + Z(1+B)\}}{ZH(1+\gamma)}\end{aligned} \quad (18)$$

を得る．動学体系（$\widetilde{m_t}$, $\widetilde{\theta}_{t+1}$）は（12）と（18）の連立差分方程式として記述できる．記述の前に，（12）のθ_tに（18）式を代入すると，

$$\begin{aligned}\widetilde{\widetilde{m_t}} = &\frac{Am_{t+2}}{1-AB}(A-\frac{Z+\gamma HA}{K}) + \frac{(1+n)\theta_{t+2}A}{1-AB}(A-\frac{Z+\gamma HA}{K}) + \frac{\theta_{t+1}AZ}{1-AB}\{1-\frac{(1+\gamma)H}{K}\} \\ &+\frac{A}{1-AB}[1+AX-\frac{X\{Z(1+B)+\gamma H(1+A)\}}{K}]\end{aligned} \quad (19)$$

を得る．

従って，動学体系 $(\widetilde{\widetilde{m}}_t, \widetilde{\theta}_{t+1})$ は，（18）と（19）の連立差分方程式の行列表示で以下のように記述できる．

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\widetilde{m}}_t \\ \widetilde{\theta}_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(AH-Z)A}{(1-AB)H(1+\gamma)} & \frac{(AH-Z)(1+n)G}{(1-AB)H(1+\gamma)} \\ \frac{-(Z+\gamma HA)A}{GHZ(1+\gamma)} & \frac{-(Z+\gamma HA)(1+n)G}{GHZ(1+\gamma)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{t+2} \\ \theta_{t+2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{(H-ZB)B}{(1-AB)H(1+\gamma)} & \frac{-(H-ZB)(1+r)G}{(1-AB)H(1+\gamma)} \\ -\frac{(ZB+\gamma H)B}{GHZ(1+\gamma)} & \frac{(ZB+\gamma H)(1+r)G}{GHZ(1+\gamma)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{t-1} \\ \theta_t \end{pmatrix}$$
$$+ \begin{pmatrix} \frac{GX\{H(1+A)-Z(1+B)\}}{(1-AB)H(1+\gamma)} \\ \frac{X\{\gamma H(1+A)+Z(1+B)\}}{HZ(1+\gamma)} \end{pmatrix} \tag{20}$$

但し，$Z = 1 + n - (1 + r)A, H = (1 + n)B - (1 + r), A = \frac{b(1+n)}{(1+r)(1+\beta+a+b)}, B = \frac{a(1+r)}{(1+n)(1+\beta+a+b)}, G = \frac{b}{(1+r)(1+\beta+a+b)}, X = (1 + r)w - M$

である．

以下では定常状態において分析することにする．定常状態を$\theta_{t+2} = \theta_{t+1} = \theta_t = \theta$，$m_{t+2} = m_{t+1} = m_t = m_{t-1} = m$とする．まず定常状態において連立方程式（12）と（18）から（$\widetilde{m}$，$\widetilde{\theta}$）が得られ，それぞれ

$$\widetilde{\theta} = \frac{X}{r-n}[1 + \{\frac{a(1+r)(1+\gamma)}{Y} + \frac{b(1+n)^2}{(1+r)Y} + \frac{a(1+r)^2}{(1+n)Y} - (1+r)(1+\gamma)\}$$
$$\cdot \gamma \frac{2(n-r)\{b(1+r)+r\} + (2n-r)\{\beta(1+r)+1\}}{(2+r+n)(r-n)S - YTQ}]\ [3] \tag{21}$$

$$\widetilde{m} = \frac{b(2+r+n)\{(1+r)w - M\}\{Q - \phi \cdot (r-n)\}}{(1+r)\{(2+r+n)(r-n)S - (1+\beta+a+b)TQ\}} \tag{22}$$

である．(21)より以下の命題が得られる．

命題２　2 期間政権を仮定すると，定常状態における最適公的年金保険料が決定される．

定常状態における親への家族内所得移転$\widetilde{m}$，公的年金保険料$\widetilde{\theta}$に二つの利他性パラメーターa，b，自分自身の介護支出M，利子率rが与える効果についてはシミュレーション分析から命題 3 にまとめられる．

命題３　（ｉ）利子率＞人口成長率（動学的効率性（過小資本蓄積））で，子供への利他性が非常に小さい時，bのある範囲で，親への利他性の増加は親への家族内所得移転を増加させてその後減

少させる効果がある．子供への利他性が非常に小さい時，bのある範囲で親への利他性の増加は公的年金保険料も増加させてその後減少させる効果がある．

（ⅱ）利子率＞人口成長率で，親への家族内所得移転と自分の若年期の消費を同等に評価し，親への利他性が子供への利他性より大で自分自身の介護支出が少ない時，aのある範囲で，子供への利他性の増加は親への家族内所得移転を増加させ，公的年金保険料を減少させる効果がある．この時，自分自身の介護費用が多いならば，aの小さい値の範囲で，子供への利他性の増加は親への家族内所得移転を増加させて公的年金保険料を減少させる効果があるが，aの値がある値を超えて大きくなるにつれて，子供への利他性の増加は親への家族内所得移転を減少させて公的年金保険料を増加させる効果を持つ．

（ⅲ）利子率＞人口成長率で，親への家族内所得移転と自分の若年期の消費を同等に評価し，親への利他性が子供への利他性より大である時，自分自身の介護支出の増加は親への家族内所得移転も公的年金保険料も減少させる．

（ⅳ）親への家族内所得移転と自分の若年期の消費を同等に評価し，親への利他性が子供への利他性より大で自分自身の介護支出が少ない時，利子率の小さいある範囲（但し人口成長率と等しい利子率は除く）で，利子率の上昇は親への家族内所得移転を減少させて公的年金保険料を増加させる効果があり，利子率の値の範囲が大きくなると，利子率の上昇は親への家族内所得移転も公的年金保険料も減少させる効果がある．

（証明）シミュレーションの結果から（ⅰ）$a = 0.04, n = 0.01, r = 0.015, \beta = \gamma = 0.9, M = 3$の時、$0.2 \leqq b \leqq 0.3$ならば $\frac{\partial \tilde{m}}{\partial b} > 0$, $0.3 \leqq b < 2.4$ならば$\frac{\partial \tilde{m}}{\partial b} < 0$, $0.2 \leqq b \leqq 0.4$ならば$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial b} > 0$, $0.4 \leqq b < 2.4$ならば$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial b} < 0$,

（ⅱ）$b = 1, n = 0.01, r = 0.015, \beta = \gamma = 0.9, M = 3$の時、$0.03 \leqq a \leqq 0.05$ならば$\frac{\partial \tilde{m}}{\partial a} > 0, \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial a} < 0$,
$b = 1, n = 0.01, r = 0.015, \beta = \gamma = 0.9, M = 6$の時、$0 < a \leqq 0.1$ならば$\frac{\partial \tilde{m}}{\partial a} > 0, \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial a} < 0$, $0.1 \leqq a \leqq 1$ならば$\frac{\partial \tilde{m}}{\partial a} < 0, \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial a} > 0$,

（ⅲ）$a = 0.01, b = 1, n = 0.01, r = 0.015, \beta = \gamma = 0.9, 0 \leqq M \leqq 9$の時、$\frac{\partial \tilde{m}}{\partial M} < 0, \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial M} < 0$,

（ⅳ）$n = 0.01, a = 0.04, b = 1, \beta = \gamma = 0.9, M = 3$の時、$0 \leqq r \leqq 0.012$（但し$r \neq 0.01$）ならば$\frac{\partial \tilde{m}}{\partial r} < 0, \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial r} > 0$, $0.012 \leqq r \leqq 0.02$ならば$\frac{\partial \tilde{m}}{\partial r} < 0, \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial r} < 0$（証明終わり）

４　無限期間政府の最適年金政策

本節では無限期間政府による定常状態における賦課方式公的年金制度下での最適年金政策を導出する．前節は政府も個人も２期間存続する場合を仮定しているのに対して，本節は政府は無限期間存在し個人は２期間生存する場合の考察になっており，ＯＬＧモデルの最適課税の一般的な想定と同じである．

まずｔ期のｔ世代の代表的家計の生涯効用関数は，

$$u_t = \log c_t + \beta \log d_{t+1} + a \log x_{t+1} + b \log m_t \quad 0 < \beta < 1, 0 < a \leqq 1, 0 < b \leqq 1$$

である．この家計の若年期，老年期の予算制約は，それぞれ

$$w + x_t - \theta_t = c_t + s_t + m_t$$
$$(1+r)s_t + \pi_{t+1} + (1+n)m^e_{t+1} = d_{t+1} + (1+n)x_{t+1} + M$$

である．但し，賦課方式公的年金制度であるので，$(1+n)\theta_{t+1} = \pi_{t+1}$である．これらの予算制約のもとで，ｔ世代家計は$w$，$r$，$n$，$\theta_t$，$\pi_{t+1}$，$x_t$，$m_{t+1}$，$M$を所与として，生涯効用を最大にするように若年期の消費c_t，老年期の消費d_{t+1}，ｔ＋１期に子供１人当りに残す遺産x_{t+1}，親へのｔ期での私的家族内所得移転m_tの配分を決定する．効用最大化の一階条件は

$$c_t = \frac{1}{b} m_t \tag{23}$$

$$d_{t+1} = \frac{\beta(1+r)}{b} m_t \tag{24}$$

$$x_{t+1} = \frac{a(1+r)}{b(1+n)} m_t \tag{25}$$

$$m_t = \frac{a(1+r)m_{t-1}}{(1+\beta+a+b)(1+n)} + \frac{b(1+n)m_{t+1}}{(1+\beta+a+b)(1+r)} + \frac{b}{(1+\beta+a+b)}\left(w - \theta_t - \frac{M}{1+r} + \frac{1+n}{1+r}\theta_{t+1}\right) \tag{26}$$

である．ここで，(26)を

$$m_{t+1} = Am_t + Bm_{t-1} + C\theta_t + D\theta_{t+1} + E \tag{27}$$

と書き表すことにする．但し，$A = \frac{(1+r)(1+\beta+a+b)}{b(1+n)}, B = \frac{-a(1+r)^2}{b(1+n)^2}, C = \frac{1+r}{1+n}, D = -1, E = \frac{-(1+r)}{(1+n)}(w - \frac{M}{1+r})$とおく．$m_0$，$m_{-1}$を所与とすると，

$$\begin{aligned} m_t = &\{A^t + (t-1)A^{t-2}B + \Delta_1\}m_0 + \{A^{t-1}B + (t-2)A^{t-1}B^2 + \Delta_2\}m_{-1} \\ &+ \{A^{t-1} + (t-2)A^{t-3}B + \Delta_3\}C\theta_0 + \cdots + (A^3D + 2ABD + A^2C + BC)\theta_{t-3} \\ &+ (A^2D + BD + AC)\theta_{t-2} + (AD + C)\theta_{t-1} + D\theta_t + (\Delta_4 + A^3 + 2AB + A^2 + B + A + 1)E \end{aligned}$$

が推測される[4]．Δ_1とθ_{t-3}の係数は４期から出現し，Δ_2とΔ_3とΔ_4は５期から出現し，θ_{t-2}の係数とθ_0の係数の第２項（t－２）$A^{t-3}B$は４期から出現する．

無限期間の政府は，政府の毎期の予算制約$L_t\theta_t = L_{t-1}\pi_t$のもとで，$m_0$，$m_{-1}$を所与として，０期から無限期までの社会厚生関数$W$を最大にするように公的年金保険料の流列$\{\theta_t \mid t \in [0, \infty]\}$を決

定する．この時，社会厚生関数は以下の間接効用関数である．

$$\underset{\{\theta_t\}}{Max}\, W = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u_t(m_t(\theta_0, \cdots, \theta_t)) \tag{28}$$

(28)は以下の展開

$$\begin{aligned}
W &= u_0 + \delta u_1 + \delta^2 u_2 + \cdots + \delta^{t-1} u_{t-1} + \delta^t u_t + \delta^{t+1} u_{t+1} + \cdots \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t [(1 + \beta + a + b) \log m_t(\theta_0, \cdots, \theta_t) + \log \frac{1}{b} + \beta \log \frac{\beta(1+r)}{b} + a \log \frac{a(1+r)}{b(1+n)}] \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t [(1 + \beta + a + b) \log m_t(\theta_0, \cdots, \theta_t)] + \text{定数} \\
&\propto \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t (1 + \beta + a + b) \log m_t(\theta_0, \cdots, \theta_t) \\
&= (1 + \beta + a + b) \log m_0 + \delta(1 + \beta + a + b) \log m_1 + \delta^2(1 + \beta + a + b) \log m_2 + \cdots \\
&\quad + \delta^t(1 + \beta + a + b) \log m_t + \cdots
\end{aligned}$$

より，社会厚生関数をあらためて以下の通り，

$$V = \frac{W}{(1 + \beta + a + b)} = \log m_0 + \delta \log m_1 + \delta^2 \log m_2 + \cdots + \delta^t \log m_t + \cdots \tag{29}$$

とおく．つまり，無限期間政府はm_0，m_{-1}を所与として以下の社会厚生問題を解くことになる．

$$\underset{\theta_0, \cdots \theta_t \cdots}{Max}\; V = \log m_0 + \delta \log m_1(\theta_0, \theta_1) + \delta^2 \log m_2(\theta_0, \theta_1, \theta_2) + \cdots + \delta^t \log m_t(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_t) + \cdots \tag{30}$$

無限期間政府の社会厚生最大化問題の一階条件は以下のとおりである．

$$\begin{aligned}
&for \quad \forall t, t \in [0, \infty], \\
\frac{\partial V}{\partial \theta_0} &= \frac{1}{m_0}\frac{\partial m_0}{\partial \theta_0} + \frac{\delta}{m_1}\frac{\partial m_1}{\partial \theta_0} + \frac{\delta^2}{m_2}\frac{\partial m_2}{\partial \theta_0} + \frac{\delta^3}{m_3}\frac{\partial m_3}{\partial \theta_0} + \cdots + \frac{\delta^t}{m_t}\frac{\partial m_t}{\partial \theta_0} + \frac{\delta^{t+1}}{m_{t+1}}\frac{\partial m_{t+1}}{\partial \theta_0} + \cdots \\
&= 0 + \frac{\delta}{m_1}C + \frac{\delta^2}{m_2}AC + \frac{\delta^3}{m_3}(A^2 + B)C + \cdots + \frac{\delta^t}{m_t}\{A^{t-1} + (t-2)A^{t-3}B + \Delta_3\}C + \frac{\delta^{t+1}}{m_{t+1}}\frac{\partial m_{t+1}}{\partial \theta_0} + \cdots \\
&= 0 \\
\frac{\partial V}{\partial \theta_1} &= \frac{\delta}{m_1}\frac{\partial m_1}{\partial \theta_1} + \frac{\delta^2}{m_2}\frac{\partial m_2}{\partial \theta_1} + \frac{\delta^3}{m_3}\frac{\partial m_3}{\partial \theta_1} + \cdots + \frac{\delta^t}{m_t}\frac{\partial m_t}{\partial \theta_1} + \frac{\delta^{t+1}}{m_{t+1}}\frac{\partial m_{t+1}}{\partial \theta_1} + \cdots \\
&= \frac{\delta}{m_1}D + \frac{\delta^2}{m_2}(AD + C) + \frac{\delta^3}{m_3}(A^2 D + BD + AC) + \cdots + \frac{\delta^t}{m_t}\frac{\partial m_t}{\partial \theta_1} + \frac{\delta^{t+1}}{m_{t+1}}\frac{\partial m_{t+1}}{\partial \theta_1} + \cdots \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial \theta_2} &= \frac{\delta^2}{m_2}\frac{\partial m_2}{\partial \theta_2} + \frac{\delta^3}{m_3}\frac{\partial m_3}{\partial \theta_2} + \cdots + \frac{\delta^t}{m_t}\frac{\partial m_t}{\partial \theta_2} + \frac{\delta^{t+1}}{m_{t+1}}\frac{\partial m_{t+1}}{\partial \theta_2} + \cdots \\
&= \frac{\delta^2}{m_2}D + \frac{\delta^3}{m_3}(AD + C) + \frac{\delta^4}{m_4}(A^2D + BD + AC) + \cdots + \frac{\delta^t}{m_t}\frac{\partial m_t}{\partial \theta_2} + \frac{\delta^{t+1}}{m_{t+1}}\frac{\partial m_{t+1}}{\partial \theta_2} + \cdots \\
&= 0 \\
\frac{\partial V}{\partial \theta_3} &= \frac{\delta^3}{m_3}\frac{\partial m_3}{\partial \theta_3} + \cdots + \frac{\delta^t}{m_t}\frac{\partial m_t}{\partial \theta_3} + \frac{\delta^{t+1}}{m_{t+1}}\frac{\partial m_{t+1}}{\partial \theta_3} + \cdots \\
&= \frac{\delta^3}{m_3}D + \frac{\delta^4}{m_4}(AD + C) + \frac{\delta^5}{m_5}(A^2D + BD + AC) + \cdots + \frac{\delta^t}{m_t}\frac{\partial m_t}{\partial \theta_3} + \frac{\delta^{t+1}}{m_{t+1}}\frac{\partial m_{t+1}}{\partial \theta_3} + \cdots \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$\vdots$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial \theta_{t-1}} &= \frac{\delta^{t-1}}{m_{t-1}}\frac{\partial m_{t-1}}{\partial \theta_{t-1}} + \frac{\delta^t}{m_t}\frac{\partial m_t}{\partial \theta_{t-1}} + \frac{\delta^{t+1}}{m_{t+1}}\frac{\partial m_{t+1}}{\partial \theta_{t-1}} + \cdots \\
&= \frac{\delta^{t-1}}{m_{t-1}}D + \frac{\delta^t}{m_t}(AD + C) + \frac{\delta^{t+1}}{m_{t+1}}\frac{\partial m_{t+1}}{\partial \theta_{t-1}} + \cdots \\
&= 0 \\
\frac{\partial V}{\partial \theta_t} &= \frac{\delta^t}{m_t}\frac{\partial m_t}{\partial \theta_t} + \frac{\delta^{t+1}}{m_{t+1}}\frac{\partial m_{t+1}}{\partial \theta_t} + \cdots \\
&= \frac{\delta^t}{m_t}D + \frac{\delta^{t+1}}{m_{t+1}}\frac{\partial m_{t+1}}{\partial \theta_t} + \cdots \\
&= 0 \\
\frac{\partial V}{\partial \theta_{t+1}} &= \frac{\delta^{t+1}}{m_{t+1}}\frac{\partial m_{t+1}}{\partial \theta_{t+1}} + \cdots \\
&= \frac{\delta^{t+1}}{m_{t+1}}D + \cdots \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$\vdots$$

以上をまとめて再掲すると，最大化の一階条件は，

$for \ \ \forall t, t \geqq 1,$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_t} = \sum_{i=t}^{\infty} \frac{\delta^i}{m_i}\frac{\partial m_i}{\partial \theta_t} = D\frac{\delta^t}{m_t} + \sum_{i=t+1}^{\infty} \frac{\delta^i}{m_i}\frac{\partial m_i}{\partial \theta_t} = 0 \tag{31}$$

$for \ \ t = 0,$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_0} = \sum_{i=t+1}^{\infty} \frac{\delta^i}{m_i}\frac{\partial m_i}{\partial \theta_0} = 0 \tag{32}$$

である．(31)，(32) より，以下の命題を得る．

命題４　最適公的年金保険料の流列$\{\theta_t \mid t \in [0, \infty]\}$は解くことができない．

命題 4 は先行研究でこれまで分析されてこなかったことの裏付けとなることを示していると考えられる．これ以降，定常状態で考察することにする．$m = m_0 = m_{-1} = m_1 = m_2 = \cdots$を$m_1 = Am_0 + Bm_{-1} + C\theta_0 + D\theta_1 + E$ に代入すると，$m = (A+B)m + C\theta_0 + D\theta_1 + E$（ i ）となる．

同様にして，$m_2=Am_1+Bm_0+C\theta_1+D\theta_2+E$ に代入すると，$m=(A+B)m+C\theta_1+D\theta_2+E$（ⅱ）となる．（ⅰ）と（ⅱ）より，$C\theta_0+D\theta_1=C\theta_1+D\theta_2$である．繰り返すと，$C\theta_0+D\theta_1=C\theta_1+D\theta_2=C\theta_2+D\theta_3=C\theta_3+D\theta_4=\cdots$より，

$$\begin{aligned}\theta_1(D-C) &= D\theta_2-C\theta_0,\\ \theta_2(D-C) &= D\theta_3-C\theta_1,\\ \theta_3(D-C) &= D\theta_4-C\theta_2,\\ &\vdots\end{aligned}$$

となる．ここで，簡単化のため，$D-C=1$ とすると，$\theta_1=D\theta_2-C\theta_0$, $\theta_2=D\theta_3-C\theta_1$, $\theta_3=D\theta_4-C\theta_2,\cdots$となる．$D\theta_2=\theta_1+C\theta_0$ つまり $\theta_2=\frac{1}{D}\theta_1+\frac{C}{D}\theta_0$より，$\frac{1}{\mathrm{D}}+\frac{C}{D}=1$であるので $\theta_2-\theta_1=-\frac{C}{D}(\theta_1-\theta_0)$ である．つまり公的年金保険料θの階差数列が公比$-\frac{C}{D}$の等比数列である．なお，$D-C=1$を仮定しなくとも，$D\theta_2=(D-C)\theta_1+C\theta_0$より $\theta_2=\frac{D-C}{D}\theta_1+\frac{C}{D}\theta_0$より，$\frac{D-C}{D}+\frac{C}{D}=1$であるので，$\theta_2-\theta_1=-\frac{C}{D}(\theta_1-\theta_0)$ である．つまり公的年金保険料θの階差数列が公比$-\frac{C}{D}$の等比数列である．

$$\begin{aligned}\theta_2-\theta_1 &= -\tfrac{C}{D}(\theta_1-\theta_0)\\ \theta_3-\theta_2 &= -\tfrac{C}{D}(\theta_2-\theta_1) = (-\tfrac{C}{D})^2(\theta_1-\theta_0)\\ &\vdots\\ \theta_{t+1}-\theta_t &= (-\tfrac{C}{D})^t(\theta_1-\theta_0)\\ &\vdots\end{aligned}$$

である．$\theta_1=\theta_0$とすると，$\theta_{t+1}=\theta_t$となり，$\theta=\theta_0=\theta_1=\theta_2=\cdots=\theta_t=\theta_{t+1}\cdots$が導ける．これを定常状態とする．

もしも$\theta_1\neq\theta_0$とすると，$for\ \ \forall t\geqq 1, \frac{\theta_2-\theta_1}{\theta_1-\theta_0}=-\frac{C}{D}, \frac{\theta_3-\theta_2}{\theta_2-\theta_1}=-\frac{C}{D},\cdots$となり、$|-\frac{C}{D}|$ と１との大小関係で，公的年金保険料の階差が拡大するか収束するかとなる．

定常状態で無限期間政府の社会厚生関数Wは，

$$W = u+\delta u+\delta^2 u+\cdots+\delta^{t-1}u+\delta^t u+\delta^{t+1}u+\cdots \tag{33}$$

である．(33) を展開すると

$$\begin{aligned}W &= (1+\beta+a+b)\log m+\delta(1+\beta+a+b)\log m+\delta^2(1+\beta+a+b)\log m+\cdots\\ &\quad+\delta^t(1+\beta+a+b)\log m+\cdots = (1+\beta+a+b)\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t\log m\\ &= (1+\beta+a+b)(1+\delta+\delta^2+\cdots+\delta^t+\cdots)\log m\\ &= (1+\beta+a+b)\frac{1}{1-\delta}\log m \propto \log m = V\end{aligned}$$

となる．但し$\delta<1$とする．$|\delta|<1$なので収束する．ここで，定常状態で無限期間政府の社会厚生関数を$V=\frac{W}{(1+\beta+a+b)}=\log m(\theta)$として，以下の社会厚生最大化問題を公的年金保険料について解く．

$$\underset{\theta}{Max}\ W \propto \underset{\theta}{Max}\ V = \underset{\theta}{Max}\ \log m(\theta) \tag{34}$$

（34）の一階条件は,

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{1}{m}\frac{\partial m(\theta)}{\partial \theta} = 0 \tag{35}$$

である．但し,

$$m = \frac{b\{w - \frac{M}{1+r} + (\frac{1+n}{1+r} - 1)\theta\}}{(1+\beta+a+b) - \frac{a(1+r)}{1+n} - \frac{b(1+n)}{1+r}}$$
$$= \frac{b(w - \frac{M}{1+r})}{(1+\beta+a+b) - \frac{a(1+r)}{1+n} - \frac{b(1+n)}{1+r}} + \frac{b(\frac{1+n}{1+r} - 1)\theta}{(1+\beta+a+b) - \frac{a(1+r)}{1+n} - \frac{b(1+n)}{1+r}} \tag{36}$$

とする．$m(\theta) \geqq 0$（$\because c \geqq 0$）より,（36）式の右辺$\geqq 0$のθの定義域を調べる．

まず（36）の分母> 0のとき，つまり，$(1+\beta+a+b)(1+n)(1+r) > a(1+r)^2 + b(1+n)^2$のとき，$b\{w - \frac{M}{1+r} + (\frac{1+n}{1+r} - 1)\theta\} \geqq 0$である．本論文では$b > 0$を仮定しているので，$w - \frac{M}{1+r} \geqq -(\frac{1+n}{1+r} - 1)\theta$である．

このとき$\frac{1+n}{1+r} > 1$つまり$n > r$ならば,

$$\frac{w - \frac{M}{1+r}}{\frac{1+n}{1+r} - 1} \geqq -\theta$$

なので,

$$\frac{-\{(1+r)w - M\}}{n - r} \leqq \theta \tag{37}$$

となる．左辺は負の値である．

また，$\frac{1+n}{1+r} < 1$つまり$n < r$ならば,

$$\theta \leqq \frac{-\{(1+r)w - M\}}{n - r} \tag{38}$$

となる．右辺は正の値である．

以上より，$(1+\beta+a+b)(1+n)(1+r) > a(1+r)^2 + b(1+n)^2$かつ$b > 0$の時，$m(\theta) \geqq 0$になる$\theta$の範囲は

$n > r$（過剰資本蓄積（動学的非効率性））ならば、$\frac{-\{(1+r)w-M\}}{n-r} \leqq \theta$,

$n < r$（過少資本蓄積（動学的効率性））ならば、$\frac{-\{(1+r)w-M\}}{n-r} \geqq \theta$

である．

次に(36)の分母＜０のとき，つまり，$(1+\beta+a+b)(1+n)(1+r)<a(1+r)^2+b(1+n)^2$のとき，$b\{w-\frac{M}{1+r}+(\frac{1+n}{1+r}-1)\theta\}\leqq 0$である．$b>0$を仮定しているので，$w-\frac{M}{1+r}\leqq-(\frac{1+n}{1+r}-1)\theta$である。

このとき$n>r$ならば，

$$\theta\leqq\frac{-\{(1+r)w-M\}}{n-r} \tag{39}$$

である．右辺は負の値である．

$n<r$ならば，

$$\frac{-\{(1+r)w-M\}}{n-r}\leqq\theta \tag{40}$$

である．左辺は正の値である．

以上より，$(1+\beta+a+b)(1+n)(1+r)<a(1+r)^2+b(1+n)^2$かつ$b>0$の時，$m(\theta)\geqq 0$になる$\theta$の範囲は$n>r$ならば，$\theta\leqq\frac{-\{(1+r)w-M\}}{n-r}$，$n<r$ならば，$\frac{-\{(1+r)w-M\}}{n-r}\leqq\theta$である．

ここで，(35) を解くと，

$$\frac{\{(1+\beta+a+b)-\frac{a(1+r)}{1+n}-\frac{b(1+n)}{1+r}\}}{b\{w-\frac{M}{1+r}+(\frac{1+n}{1+r}-1)\theta\}}\frac{b(\frac{1+n}{1+r}-1)}{(1+\beta+a+b)-\frac{a(1+r)}{1+n}-\frac{b(1+n)}{1+r}}=0 \tag{41}$$

である．(41) を計算すると，

$$\frac{n-r}{w(1+r)-M+(n-r)\theta}=0 \tag{42}$$

となる．(42) からθを求めると，$n=r$の時，θはどんな値もとりうることが得られる．

(42) を再掲すると，

$$\frac{\partial V}{\partial\theta}=\frac{1}{\{\theta-\frac{w(1+r)-M}{n-r}\}}=0$$

である．したがって，(41)の左辺はθについて線形なので，θは端点解になる．$n\neq r$の時，$n>r$ならば，θは大きいほど望ましく，$n\neq r$の時，$n<r$ならば，θは小さいほど望ましいことが得られる．以上より，以下の命題を得る．

命題５　$n=r$の時，最適公的年金保険料θは (42) を満たすようにどんな値もとり得る．$n\neq r$のときθは端点解となる．過剰資本蓄積（$r<n$）の場合，パラメーターの値に依存して$\theta=\infty$か

$\theta=\frac{-\{(1+r)w-M\}}{n-r}<0$ となる．過少資本蓄積（$n<r$）の場合も，パラメーターの値に依存して，$\theta=-\infty$ か $\theta=\frac{-\{(1+r)w-M\}}{n-r}>0$ となる．

（証明） 最適公的年金保険料 θ は，$n=r$ のとき，$\theta=[-\infty,\ \infty]$ である．$n\neq r$ のとき θ は端点解となる．過剰資本蓄積（$r<n$）の場合，$(1+\beta+a+b)(1+n)(1+r)>a(1+r)^2+b(1+n)^2$ ならば $\theta=\infty$ となり，$(1+\beta+a+b)(1+n)(1+r)<a(1+r)^2+b(1+n)^2$ ならば $\theta=\frac{-\{(1+r)w-M\}}{n-r}$ となる．過少資本蓄積（n＜ r）の場合，$(1+\beta+a+b)(1+n)(1+r)>a(1+r)^2+b(1+n)^2$ ならば $\theta=-\infty$ となり，$(1+\beta+a+b)(1+n)(1+r)<a(1+r)^2+b(1+n)^2$ ならば $\theta=\frac{-\{(1+r)w-M\}}{n-r}$ となる．（証明終わり）

5　おわりに

本稿では，小国開放経済下 2 期間生存joy-of-giving型双方向性利他性ＯＬＧモデルに 2 期間政権を導入したことにより，最適年金政策（最適年金保険料政策）の条件と定常状態での最適年金保険料の導出及び最適年金保険料と政府が政策に読み込んでいる親への家族内所得移転への子供への利他性と親への利他性の影響をシミュレーション分析することができた．また，無限期間政府の最適年金政策の条件と定常状態での解を導出することもできた．

その結果，2 期間政権を仮定すると定常状態における最適公的年金保険料が決定される．一方，無限期間政府の場合，定常状態において，人口成長率と利子率が等しい時，最適公的年金保険料は (42) 式を満たすようにどんな値もとり得て，人口成長率と利子率が異なる時，最適公的年金保険料は端点解となることが明らかになった．また，シミュレーションの結果，動学的効率性（過小資本蓄積つまり利子率が人口成長率より大である）の場合，以下の通りとなった．

子供への利他性と親への利他性の限られた範囲内で，親への利他性が家族内所得移転に与える効果はプラスからマイナスになり，公的年金保険料への効果もプラスからマイナスになる．各パラメーターの制約の下で子供への利他性の家族内所得移転に対する効果はプラスからマイナスになり，公的年金保険料に対する効果はマイナスからプラスになる．各パラメーターの制約下で，自分自身の介護費用は家族内所得移転も公的年金保険料も減少させる．各パラメーターの制約下で，利子率の上昇は親への家族内所得移転を減少させて公的年金保険料を増加させる効果があり，利子率の値の範囲が大きくなると利子率の上昇は親への家族内所得移転も公的年金保険料も減少させる効果がある．

数学注

［1］（8）を書き直すと，

$$m_t = \frac{b(1+n)}{(1+r)(1+\beta+a+b)} m_{t+1} + \frac{a(1+r)}{(1+n)(1+\beta+a+b)} m_{t-1} + \frac{b}{(1+\beta+a+b)}\left(w - \theta_t - \frac{M}{1+r} + \frac{1+n}{1+r}\theta_{t+1}\right) \tag{43}$$

となる．さらに（43）を

$$m_t = A m_{t+1} + B m_{t-1} + \frac{A}{1+n}\{X-(1+r)\theta_t + (1+n)\theta_{t+1}\} \tag{44}$$

と書き直す．但し，

$$A = \frac{b(1+n)}{(1+r)(1+\beta+a+b)}, B = \frac{a(1+r)}{(1+n)(1+\beta+a+b)}, X = (1+r)w - M$$

とする．

θ_t，θ_{t+1}は政策パラメーターであるので家計は所与とみなすので，（43）はm_tに関する２階線形非同次差分方程式である．（43）を

$$m_{t+1} - \frac{1}{A}m_t + \frac{B}{A}m_{t-1} = \frac{R(\theta_t, \theta_{t+1})}{A} \tag{45}$$

と書き直す．$R(\theta_t,\ \theta_{t+1}) = -\frac{A}{1+n}\{X-(1+r)\theta_t+(1+n)\theta_{t+1}\} = R(t,\ t+1)$とおいて表記する．$\frac{1}{A}$，$\frac{B}{A}$，$\frac{R(\theta_t, \theta_{t+1})}{A}$ は既知とする．

（45）の同次形を

$$m_{t+1} - \frac{1}{A}m_t + \frac{B}{A}m_{t-1} = 0 \tag{46}$$

とする．

$\frac{1}{A^2} - \frac{4B_t}{A} > 0$ の場合，固有値 $\lambda_1 = \frac{1}{2A} + \frac{1}{2A}\sqrt{\frac{1}{A^2} - \frac{4B}{A}} > 0, \lambda_2 = \frac{1}{2A} - \frac{1}{2A}\sqrt{\frac{1}{A^2} - \frac{4B}{A}} > 0$ ならば，

$$m_t = \left(\frac{1}{2A} + \frac{1}{2A}\sqrt{\frac{1}{A^2} - \frac{4B}{A}}\right)^t, m_t = \left(\frac{1}{2A} - \frac{1}{2A}\sqrt{\frac{1}{A^2} - \frac{4B}{A}}\right)^t \tag{47}$$

は（46）の解の一部となる．（46）の一般解は

$$m_t = c_1\left(\frac{1}{2A} + \frac{1}{2A}\sqrt{\frac{1}{A^2} - \frac{4B}{A}}\right)^t + c_2\left(\frac{1}{2A} - \frac{1}{2A}\sqrt{\frac{1}{A^2} - \frac{4B}{A}}\right)^t \tag{48}$$

である．未定係数c_1，c_2を初期値$m_{t-1}=\widetilde{m}_0$，$m_{t+1}=\widetilde{m}_2$として求める．よって，同次 2 階差分方程式（46）の解は，

$$m_t = c_1\left(\frac{1}{2A}+\frac{1}{2A}\sqrt{\frac{1}{A^2}-\frac{4B}{A}}\right)^t + c_2\left(\frac{1}{2A}-\frac{1}{2A}\sqrt{\frac{1}{A^2}-\frac{4B}{A}}\right)^t \tag{49}$$

である．但し，

$$c_1 = \frac{A}{\sqrt{\frac{1}{A^2}-\frac{4B}{A}}}\{\widetilde{m_2}-\widetilde{m_0}(\frac{1}{2A^2}-\frac{B_t}{A}-\frac{1}{2A}\sqrt{\frac{1}{A^2}-\frac{4B}{A}})\}$$

$$c_2 = \{1+\frac{A}{\sqrt{\frac{1}{A^2}-\frac{4B}{A}}}(\frac{1}{2A^2}-\frac{B}{A}-\frac{1}{2A}\sqrt{\frac{1}{A^2}-\frac{4B}{A}})\}\widetilde{m_0}-\frac{A\widetilde{m_2}}{\sqrt{\frac{1}{A^2}-\frac{4B}{A}}}$$

$$\text{初期値 } m_{t-1} = \widetilde{m_0}, m_{t+1} = \widetilde{m_2}$$

である．

次に非同次 2 階差分方程式（45）の解は

$$m_t^* = c_1^{n0}m_{1t}+c_2^{n0}m_{2t}-\frac{1}{A}(\sum_{k=n0+1}^{t}\frac{R(k,k+1)}{C[m_1,m_2]_k})m_{1t}+\frac{1}{A}(\sum_{k=n0+1}^{t}\frac{R(k,k+1)}{C[m_1,m_2]_k})m_{2t} \tag{50}$$

である．但し，

$$m_{1t} = \left(\frac{1}{2A}+\frac{1}{2A}\sqrt{\frac{1}{A^2}-\frac{4B}{A}}\right)^t, m_{2t} = \left(\frac{1}{2A}-\frac{1}{2A}\sqrt{\frac{1}{A^2}-\frac{4B}{A}}\right)^t$$

$$R(k,k+1) = -\frac{A}{1+n}\{X-(1+r)\theta_t+(1+n)\theta_{t+1}\}$$

である．$C\,[m_1, m_2]_k$ はカソラチ行列式，c_1^{n0}，$c_2^{n0}, \widetilde{m}_0, \widetilde{m}_2$は初期値として得られた．この解は$m_t^*=m_t^*(\theta_t,\ \theta_{t+1},\ \theta_{t+2};\widetilde{m}_0,\widetilde{m}_2,\ c_1^{n0},\ c_2^{n0})$となっている．

［2］ｔ政権の社会厚生最大化のθ_{t+1}の決定は，ｔ世代とｔ＋１世代の家計の行動を読み込んでいる．つまり，以下の（51）と（51）を１期後ろにずらした（52）の連立方程式からm_t，m_{t+1}を決定し，これらが政府の読み込んでいる家計の最適値$\widetilde{m_t}$，$\widetilde{m}_{t+1}$である．但し，m_{t-1}，m_{t+2}はgivenとする．

ｔ世代とｔ＋１世代の家計の私的家族内所得移転の 2 階線形差分方程式は，それぞれ

$$m_t^* = Am_{t+1}+Bm_{t-1}+A\{X-(1+r)\theta_t+\theta_{t+1}\} \tag{51}$$

$$m_{t+1}^* = Am_{t+2}+Bm_t+A\{X-(1+r)\theta_{t+1}+\theta_{t+2}\} \tag{52}$$

である．

［3］定常状態において，(12)は，

$A\theta[(1+r)(ZB+\gamma H)-\{(Z+\gamma HA)+(1+\gamma)ZH\}]=m\{A(Z+\gamma HA)+B(ZB+\gamma H)\}+AX\{Z(1+B)+\gamma H(1+A)\}$である．(18)は，$(1-AB-A^2-B)m=A[\{A+Z-(1+r)\}\theta+(1+A)X]$である．これらの2つの上式の連立方程式を解いて（$\tilde{m}$，$\tilde{\theta}$）を求めた．

［4］1期目から計算すると，

$m_1=Am_0+Bm_{-1}+C\theta_0+D\theta_1+E,$

$m_2=(A^2+B)m_0+ABm_{-1}+AC\theta_0+(AD+C)\theta_1+D\theta_2+(A+1)E,$

$m_3=(A^3+2AB)m_0+(A^2B+B^2)m_{-1}+(A^2+B)C\theta_0+(A^2D+BD+AC)\theta_1+(AD+C)\theta_2+D\theta_3+(A^2+B+A+1)E,$

$m_4=(A^4+3A^2B+B^2)m_0+(A^3B+2AB^2)m_{-1}+(A^3+2AB)C\theta_0+(A^3D+2ABD+A^2C+BC)\theta_1+(A^2D+BD+AC)\theta_2+(AD+C)\theta_3+D\theta_4+(A^3+2AB+A^2+B+A+1)E,$

$m_5=(A^5+4A^3B+3AB^2)m_0+(A^4B+3A^2B^2+B^3)m_{-1}+(A^4+3A^2B+B^2)C\theta_0+(A^4D+3A^2BD+B^2D+A^3C+2ABC)\theta_1+(A^3D+2ABD+A^2C+BC)\theta_2+(A^2D+BD+AC)\theta_3+(AD+C)\theta_4+D\theta_5+(A^4+3A^2B+B^2+A^3+2AB+A^2+B+A+1)E,$

…

となり，m_tが推測される．

参考文献

［1］ de la Croix, D. and Philippe Michel(2002), *A Theory of Economic Growth :Dynamics and Policy in Overlapping Generations*, Cambridge University Press

［2］ Diamond, P. (1965), "National debt in a neoclassical growth model", *American Economic Review*,58,1126-1150

［3］ Diamond, P. (1977), "A framework for social security analysis", *Journal of Public Economics* ,8(3),275-298

［4］ Kubo, Waka (2009), "An OLG Model Analysis of Paternalism and Fiscal Policy", the 2009 Autumn Meeting of the Japanese Association for Applied Economics

［5］ Meijdam, Lex and Harrie A. A. Verbon(1996), "Aging and Political Decision Making on Public Pensions", *Journal of Population Economics*, 9, 141-158

［6］ Michel, Philippe and Pierre Pestieau(1999), "Social Security and Early Retirement in an

Overlapping Generations Growth Model", *Working Paper*, 9951, CORE, Universite Catholique de Louvain

［7］ Michel, Philippe and Pierre Pestieau(2004), "Fiscal Policy in an Overlapping Generations Model with Bequest－as－Consumption", *Journal of Public Economic Theory*, 6(3), 397-407

［8］ Sala-I-Martin, Xavier(1996), "A positive theory of social security", *Journal of Economics Growth*, 1(2), 277-304

［9］ Samuelson, Paul(1958),"An Exact Consumption-Loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money", *Journal of Political Economy*, 66, 467-482

［10］ Samuelson, Paul(1975),"Optimal Social Security in a Life-Cycle Growth Model", *International Economic Review*, 16(3), 539-544

［11］ 藤井隆雄，林史明，入谷純，小黒一正(2012)，「最適年金の理論」，mimeo