研究ノート：遺産の存在する世代重複モデルによる分析への試論

Study note : Essay on an analysis in OLG model with bequests

久　保　和　華

本論文の目的は利他的個人と非利他的個人から構成される人口をもった世代重複モデルの定常状態での分析を試みるための布石である。そして減価償却率を考慮して、集計された資本蓄積や遺産について考察を試みることである。

キーワード：ＯＬＧ、遺産

目　次

Ⅰ　はじめに
Ⅱ　基本モデル
Ⅲ　定常状態における分析
Ⅳ　おわりに

Ⅰ　はじめに

動学モデルの先行研究には、大きく2つの流れに大別することができる。それは、家計が有限期間範囲で最適化問題を考えるライフサイクラーであるのか、あるいは家計が正の遺産を残す利他主義的な主体であり一族の無限期間の最適化問題を考えるダイナスティーであるのかに依存している。有限期間生きる個人の世代重複モデルには、Allais (1947), Samuelson (1958), Diamond (1965) があげられる。これらにより示されたことは、均斉成長経路は動学的に非効率的であるかもしれないということ、現在および将来世代の厚生を改善する公債や賦課方式社会保障のような財政政策ケースがあるということである。無限期間生きる家計の世代重複モデルはRamsey (1928) や利他的選好をもった世代重複動学モデルである。これらによって、均斉成長経路は効率的であること、資本蓄積を妨げることを意図する財政政策ケースはないことが示された。

貯蓄および遺産の動機に関する最近の実証研究には選好の点で大きな相違が見られると指摘されている。つまり、社会には少なくとも2タイプの家計、利他的両親；自分の子供に世代間移転を行なうものともう一方のタイプの両親；ライフサイクル的貯蓄のみに関心があるものが存在す

る。しかし、動学モデルの均衡分析では、同質的な選好を仮定している。利他的個人と非利他的個人が共存する世代重複モデルの構築、つまり２つの動学モデルの流れを連結したモデルが、Philippe Michel and Pierre Pestieau（1998）である。同質的個人を扱った研究は多く存在するが、これが利他的個人と非利他的個人の共存する研究である。

そこで、本稿ではPhilippe Michel and Pierre Pestieau（1998）を踏襲して、減価償却率を考慮した世代重複モデルにおいて集計された資本蓄積や遺産について考察することを試みる。

Ⅱ　基本モデル

モデルは Philippe Michel and Pierre Pestieau（1998）である。

人口成長率 n で成長する人口を考える。それは、利他的個人の比率を p 、非利他的個人の比率 $1-p$ から構成される。必要に応じて、利他的個人を A、非利他的個人を Nと表す。それぞれの個人は、利他的であろうとなかろうと、２期間生存する。第１期目に個人は非弾力的労働を行なって賃金 w_tを得る。そして第２期目に引退をする。

本稿では、効用関数と生産関数をコブダグラス型に特定化する。

まず、非利他的個人（第ｔ世代）を考察する。第１期目に個人は非弾力的労働を行なって賃金 w_tを得る。その所得で第１期目の消費 c_tをおこない、残りを貯蓄 s_t する。そして第２期目に引退をして貯蓄から得られる収入s_t（$1+r_{t+1}$）を第２期目の消費 d_tに使う。r_{t+1}はｔ＋１期の利子率である。ここでは完全予見を仮定している。個人の効用関数は、

$$u(c_t, d_{t+1}) = (1-a)\log c_t + a\log d_{t+1}$$

である。非利他的個人の最適化問題は以下の通りである。

$$\begin{aligned} &\underset{s_t}{Max}\ u(c_t, d_{t+1}) = (1-a)\log c_t + a\log d_{t+1} \\ &s_t = w_t - c_t \\ &(1+r_{t+1})s_{t+} = d_{t+1} \end{aligned} \qquad (1)$$

その結果、貯蓄関数が

$$s_t = aw_t$$

と決定される。従って最適消費は$c_t^* = (1-a)w_t, d_t^* = (1+r_{t+1})aw_t$となる。

次に、利他的個人（ｔ世代）について考察する。利他的個人は第１期目に親から受け取った遺産資産 x_t と稼得所得を、第１期目の消費と貯蓄に配分する。第２期には貯蓄収入を第２期の消費と一人当たり x_{t+1} の相続遺産を１＋ｎ人に配分する。利他的個人は無限期間の効用関数

$$v_t = (1-a)\log c_t + a\log d_{t+1} + bv_{t+1} = \sum_{\tau=t}^{\infty} b^{\tau-t}\left[(1-a)\log c_t + a\log d_{t+1} + bv_{t+1}\right]$$

によって特定される。$b<1$は利他主義と人口成長率を反映した個人の割引因子である。利他的個

人の最適問題は、

$$\underset{s_t, x_t}{Max}\ v_t = (1-a)\log c_t + a\log d_{t+1} + bv_{t+1} = \sum_{\tau=t}^{\infty} b^{\tau-t}\left[(1-a)\log c_t + a\log d_{t+1} + bv_{t+1}\right]$$

$$\begin{aligned} s.t.\ &x_t + w_t = c_t + s_t \\ &d_{t+1} + (1+n)x_{t+1} = (1+r_{t+1})s_t \end{aligned} \qquad (2)$$

である。ここでは、受け取る遺産x_tの符号は何の制約も課さないものと仮定する。上記の資源制約をまとめると、

$$x_{t+1} = \frac{(1+r_{t+1})(x_t + w_t - c_t) - d_{t+1}}{1+n} \qquad (3)$$

となる。利他的個人は以下のラグランジェ関数に表現された問題を最大化する。（導出は de la Croix and Michel（2002）を参照。）

$$\Lambda = (1-a)\log c_t + a\log d_{t+1} + \frac{b}{1+n}q_{t+1}\left[(1+r_{t+1})(x_t + w_t - c_t) - d_{t+1}\right] - q_t x_t \qquad (4)$$

ここで、q_tはx_tのシャドープライスである。最適化の条件は、

$$\frac{1-a}{c_t} = \frac{b}{1+n}q_{t+1}(1+r_{t+1}) \qquad (5)$$

$$\frac{a}{d_{t+1}} = \frac{b}{1+n}q_{t+1} \qquad (6)$$

$$q_t = \frac{b}{1+n}q_{t+1}(1+r_{t+1}) \qquad (7)$$

となる。そして横断性条件は、

$$\lim_{t\to\infty} b^t q_t x_t = 0 \qquad (8)$$

である。

生産サイドの考察にうつる。各期に２種類の生産要素、資本K_tと労働L_tが用いられてコブダグラス型生産関数$F(K_t, L_t) = AK_t^{\alpha}L_t^{1-\alpha}$に従って１財が生産される。各期に労働者$L_t$が存在し、それがｔ世代の人口であるので、

$$L_t = (1+n)L_{t-1} \qquad (9)$$

である。

利潤最大化条件から、労働要素価格をw_t、資本要素価格をr_tとすると、

$$w_t = (1-\alpha)Ak_t^{\alpha},\ r_t = \alpha Ak_t^{\alpha-1} - 1 \qquad (10)$$

を得る。ここで、資本労働比率は$k_t \equiv K_t/L_t$であり、1は減価償却率である。資本は毎期１期の終わり（期末）には完全に減価されると仮定する。

このシステムの動学は以下となる。

$$
\begin{aligned}
(1+n)k_{t+1} &= (1-p)s_t^N + ps_t^A \\
&= (1-p)aw_t + p(x_t + w_t - c_t^A)
\end{aligned} \qquad (11)
$$

$p=0$ の時、完全予見のDiamond modelの標準的動学方程式

$$(1+n)\ k_{t+1} = a(1-\alpha)Ak_t^{\alpha}$$

となる。

Ⅲ　定常状態における分析

Ⅲ－１　基本モデルケース

（１）定常状態における資本ストック

Altig and Davis (1992) 以来よく知られているように、制約のない利他主義的個人は修正黄金律に到達する。この結果は利他主義的個人の人口数に関係なく維持される。実際に、定常状態における（7）式は

$$b(1+r) = 1+n \qquad (12)$$

である。定常状態における一人当たり資本ストックは

$$k = \left(\frac{b\alpha A}{1+n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \qquad (13)$$

である。

（２）貯蓄と遺産

定常状態における貯蓄は、

$$(1+n)k = (1-p)aw + ps^A \qquad (14)$$

で与えられる。定常状態における遺産は、

$$x = \frac{(1+n)k - aw}{p(a+b-ab)} \qquad (15)$$

である。

Ⅲ－２　０＜減価償却率＜１のケース

減伽償却率 δ を基本モデルに明示的に導入すると、利潤最大化条件のうち $r_t = \alpha Ak_t^{\alpha-1} - \delta$ のみが前節から変更される。その結果、

$$k = \left\{\frac{1+n-\beta(1-\delta)}{\alpha A}\right\}^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

となる。

また

$$x = \frac{(\alpha Ak^{\alpha-1} - \delta)\{1-(1-a)(1+\alpha Ak^{\alpha-1}-\delta)\}}{2(1-a)(n-\alpha Ak^{\alpha-1}+\delta)}$$

となる。

Ⅳ　おわりに

本稿は、Philippe Michel and Pierre Pestieau (1998) モデルを踏襲にして政策効果を考察するための試論である。政策含意のまとめを次稿において掲載する。

参考文献

(1) Allais,M. 1947 *Economie et Interet*

(2) Altig,D.and S.J.Davis 1992 "The timing of intergenerational transfers, tax policy and aggregate sarlings", *American Economic Review* 82:1199-220

(3) de la Croix,D.and Michel,Ph.2002 *A Theory of Economic Growth*

(4) Diamond,P.A1965 "National debt in a neoclassical growth model", *American Economic Review* 55:1126-50

(5) Michel,Ph.1990 "Some clarifications on the transversality condition", *Econometrica* 58(3):705-23

(6) Michel,Ph.,andP.Pestieau 1998 "Fiscal policy in a growth model with both altruistic and nonaltruistic agents", *Southern Economic Journal* 64(3):682-97

(7) Ramsey,F.P. 1928 "A mathematical theory of saving", *Economic Journal* 38(152):543-59

(8) Samuelson,P.A.1958 "An exact consumption -loan model of interest with or without the social contrivance of money", *Journal of Political Economy* 66:467-82