公的年金改革の問題点：遺産に関する一考察（続）

An Issue of Public Pensions Reforms： A Study of a Bequest (continuation)

久　保　和　華

本稿では前号のⅣ節（子先手親後手のケースにおいて賦課方式公的年金制度を導入したモデル）を加筆修正した結果を示し，前号のⅢ－1節（親先手子後手のケース）に同様の公的年金政策を導入したモデルを考察し，両者の結果を比較し考察を加えた．さらに政府が戦略的に所得移転を決定するモデルを構築して最適所得移転を求め，このゲームのサブゲームパーフェクト均衡解を導出した．

キーワード：賦課方式公的年金，世代重複モデル，遺産，サブゲームパーフェクト均衡，タイミングゲーム

目　次

Ⅰ　はじめに

本節では，前号のⅣ節（子先手親後手のケースにおいて賦課方式公的年金制度を導入したモデル）を加筆修正した結果を示し，前号のⅢ－1節（親先手子後手のケース）に同様の公的年金政策を導入したモデルを考察し，両者の結果を比較し考察を加えることとする．

まず，親と子がそれぞれ子先手親後手の手番でそれぞれ遺産と貯蓄を決定するケースに，賦課方式公的年金政策を導入した場合を考察する．釜田（2000）を踏襲して人口成長率をゼロと仮定する．したがって年金保険料と年金給付額は同額と仮定し，子から親への公的な所得移転（年金保険料＝年金給付額)を T と表す．このモデルでは人口構造の変化を考慮しない最も単純な年金

導入モデルである．

政府は自然として取り扱う．政府は最初に手番を取り，そのアクションは親と子の両方に観察されるものとする．政府の所得移転と子の貯蓄を観察した後に親が遺産 B を決定する．親の老年期の消費は $c_p=s_p+T-B$，子の若年期の消費は $c_{c1}=w-T-s_c$，子の老年期の消費は $c_{c2}=r(s_c+B)$ とする．後向き帰納法を用いてこのゲームの均衡解を求める．

親は利他的な遺産動機をもち，次のような効用関数を最大化する問題に直面する．

$$\underset{B}{Max}\ \ln(s_p+T-B)+g\{\ln(w-T-s_c)+a\ln r(s_c+B)\}$$

内点解を仮定すると，最大化の一階条件は次のようになる．

$$s_c+B=ga(s_p+T-B)$$

親の反応関数が，親が受け取る年金給付額（＝子が支払う年金保険料）と子の貯蓄 s_c の関数として次のように与えられる．

$$B^*(s_c,T)=ga(1+ga)^{-1}(s_p+T)-(1+ga)^{-1}s_c$$

次に利己的な子は親の反応関数を考慮に入れて効用関数を最大化するように貯蓄を決定する．

$$\underset{s_c}{Max}\ \ln(w-T-s_c)+a\ln r(s_c+B^*(s_c,T))$$

一階条件は次のようになる．

$$s_c+B^*(s_c,T)=a(w-T-s_c)(1+B^{*\prime}(s_c))$$

$B^{*\prime}(s_c)=-(1+ga)^{-1}$ を代入して解を求めると、このゲームのサブゲームパーフェクト均衡解が以下のように T の関数として得られる．

$$s_c^*(T)=a(1+a)^{-1}(w-T)-(1+a)^{-1}(s_p+T)$$
$$B^*(s_c^*,T)=B^*(T)=ga(1+ga)^{-1}(s_p+T)-(1+ga)^{-1}(1+a)^{-1}\{a(w-T)-(s_p+T)\}$$

但し，s_p は老年期にある親が前期から持ち越している貯蓄，w は所得，r は利子率，g は個人間割引因子，a は異時点間割引因子を表す．

次に，親先手子後手のケースにおいて子から親への公的扶助（賦課方式公的年金）政策が行なわれる場合の親と子それぞれの遺産・貯蓄決定問題を同様の仮定の下で考察する．政府は自然として取り扱い，そのアクションは親と子の両方に観察されるものとする．子は政府の所得移転と親の遺産を観察した後に貯蓄を決定する．そこで，まず子の問題は以下のように表される．

$$\underset{s_c}{Max}\ \ln(w-T-s_c)+a\ln r(s_c+B^*(s_c,T))$$

内点解を仮定すると一階条件は次のようになる．

$$s_c+B=a(w-T-s_c)$$

子の反応関数が年金保険料（＝年金給付額）と親の遺産の関数として次のように与えられる．

$$s_c^*(B,T)=a(1+a)^{-1}(w-T)-(1+a)^{-1}B$$

次に親は子の反応関数を考慮に入れて遺産を決定する．

$$\underset{B}{Max}\ \ln(s_p+T-B)+g\{\ln(w-T-s_c^*(B,T))+a\ln r(s_c^*(B,T)+B)\}$$

一階条件は次のようになる．

$$\frac{-s_c^{*}{}'(B)(s_c^* + B) + a(s_c^{*}{}'(B) + 1)(w - T - s_c^*)}{(w - T - s_c^*)} = \frac{1}{g(s_p + T - B)}$$

$s_c^{*}{}'(B) = -(1+a)^{-1}$ を代入して整理すると以下のようになる．

$$KB^2 + Q(T)B + L(T) = 0$$

但し

$$\begin{aligned}
&K = aY^2(1 + g + ga) \\
&Q(T) = aY(Mw - gs_p) - aTY(M + g) \\
&L(T) = \{(1 - aY)w - gs_p + T(aY - 1 - g)\}aY(w - T) \\
&Y = (1 + a)^{-1} \\
&M = 1 + (1 - a + g)Y + (1 - a)g
\end{aligned}$$

とする．サブゲームパーフェクト均衡解は以下のように T の関数として表される．

$$s_c^*(B^*, T) = s_c^*(T) = a(1 + a)^{-1}(w - T) - (1 - a)^{-1}B^*(T)$$

$$B^*(T) = \frac{-Q(T) \pm \sqrt{Q^2(T) - 4KL(T)}}{2K}, if Q^2(T) - 4KL(T) \geq 0$$

II　政府の戦略的行動

本節では，戦略的に世代間所得移転政策を行なう政府をモデルに導入する．本節では政府は自然としてではなく，プレイヤーとしてゲームに参加する場合を考察する．

II－1　子先手親後手のケース

ゲームのタイミングは次の通りである．

（i）政府が所得移転（＝年金保険料徴収＝年金給付額支払）を行なう．

（ii）子が政府の所得移転を観察して貯蓄を選ぶ．

（iii）親が政府の所得移転と子の貯蓄を観察した後，遺産を選ぶ．

利得関数は親と子については前節までと同じ効用関数とし，政府については親と子の効用を加重平均したパレート型社会的厚生関数によって表されるものとする．

まず，手番が最後である親の最適化問題は次のようになる．

$$\underset{B \geq 0}{Max} \ln(s_p + T - B) + g\{\ln(w - T - s_c) + a \ln r(s_c + B)\}$$

この問題の一階条件は B の非負制約に注意すると次のようになる．

$$s_c + B - ga(s_p + T - B) = 0, if\ B > 0$$
$$s_c + B - ga(s_p + T - B) \leq 0, if\ B = 0$$

これより次のような親の反応関数が得られる.

$$B^*(s_c,T)=ga(1+ga)^{-1}(s_p+T)-(1+ga)^{-1}s_c, if\ B>0$$
$$B^*(s_c,T)=0, if\ B=0$$

次に子の最適化問題を解く.

$$\underset{s_c}{Max}\ln(w-T-s_c)+a\ln r(s_c+B^*(s_c,T))$$

一階条件は $B^*{}'(s_c)=-(1+ga)^{-1}(ifB^*>0)$ を代入して整理すると次のようになる.

$$s_c+(1+ga)^{-1}\{ga(s_p+T)-s_c\}-a\{1-(1+ga)^{-1}(w-T-s_c)\}=0, if\ B>0$$
$$s_c-a(w-T-s_c)=0, if\ B=0$$

これより次のような子の反応関数が得られる.

$$s_c^*(T)=a(1+a)^{-1}(w-T)-(1+a)^{-1}(s_p+T), if\ B>0$$
$$s_c^*(T)=a(1+a)^{-1}(w-T), if\ B=0$$

最後に政府の最適化問題を解く．政府の利得関数は次のようなパレート型社会的厚生関数で表される．ここで $b(>0)$ は政府が子の効用におく相対的なウェイトである．政府は社会的厚生関数を最大にするように所得移転を決定する.

$$U_G(T)=U_p(T)+bU_c(T)$$

$$\begin{aligned}
&if\ B>0, U_G\\
&=\ln(s_p+T-B^*(s_c^*(T),T))+g\{\ln(w-T-s_c^*(T))+a\ln r(s_c^*(T)+B^*(s_c^*(T),T))\}\\
&\quad+\{\ln(w-T-s_c^*(T))+a\ln r(s_c^*(T)+B^*(s_c^*(T),T))\}\\
&=\ln(s_p+T-B^*(s_c^*(T),T))+(g+b)\{\ln(w-T-s_c^*(T))+a\ln r(s_c^*(T)+B^*(s_c^*(T),T))\}\\
&if\ B=0, U_G\\
&=\ln(s_p+T)+g\{\ln(w-T-s_c^*(T))+a\ln rs_c^*(T)\}+b\{\ln(w-T-s_c^*(T))+a\ln rs_c^*(T))\}\\
&=\ln(s_p+T)+(g+b)\{\ln(w-T-s_c^*(T))+a\ln rs_c^*(T)\}
\end{aligned}$$

一階条件を求めると $B>0$ の場合 $U_G'(T)=0=0$ で不定となり，$B=0$ の場合次のようになる.

$$w-T=(s_p+T)(g+b)(1+a)$$

最適所得移転は次のように求められる.

$$T^*=\{1+(g+b)(1+a)\}^{-1}\{w-s_p(g+b)(1+a)\}$$

したがってこのゲームのサブゲームパーフェクト均衡解は以下となる.

$$T^*=\{1+(g+b)(1+a)\}^{-1}\{w-s_p(g+b)(1+a)\}$$
$$s_c^*(T)=\{1+(g+b)(1+a)\}^{-1}a(g+b)(w-s_p)$$
$$B^*=0$$

Ⅱ－2親先手子後手のケース

Ⅱ－1と同様の設定の下で，ゲームのタイミングを次のようにした場合を考察する．

（i）政府が賦課方式年金政策（年金保険料＝年金給付額の決定）を行なう．

（ii）親が政府の所得移転を観察して遺産を決定する．

（iii）子が政府の所得移転と親の遺産を観察した上で貯蓄を決定する．

まず，手番が最後である子の最適化問題は次のようになる．

$$\underset{s_c \geq 0}{Max} \ln(w-T-s_c)+a\ln r(s_c+B)$$

この問題の一階条件は次のようになる．

$$\begin{aligned} &if\ s_c>0, s_c+B-a(w-T-s_c)=0 \\ &if\ s_c=0, s_c+B-a(w-T-s_c)\leq 0 \end{aligned}$$

これより子の反応関数は次のようになる．

$$\begin{aligned} &s_c^*(B,T)=a(1+a)^{-1}(w-T)-(1+a)^{-1}B, if\ s_c>0 \\ &s_c^*(B,T)=0, if\ s_c=0 \end{aligned}$$

次に親の最適化問題を解く．

$$\underset{B}{Max} \ln(s_p+T-B)+g\{\ln(w-T-s_c{}^*(B,T))+a\ln r(s_c{}^*(B,T)+B)\}$$

一階条件は次のようになる．

$$if\ s_c>0, \frac{-s_c^*{}'(B)(s_c^*(B,T)+B)+a(s_c^*{}'(B)+1)(w-T-s_c^*(B,T))}{(w-T-s_c^*(B,T))(s_c^*(B,T)+B)}=\frac{1}{g(s_p+T-B)}$$

これを整理すると次のようになる．

$$KB^2+Q(T)B+L(T)=0$$

但し，

$$\begin{aligned} &K=aY^2(1+g+ga) \\ &Q(T)=aY(Mw-gs_p)-aTY(M+g) \\ &L(T)=\{(1-aY)w-gs_p+T(aY-1-g)\}aY(w-T) \\ &Y=(1+a)^{-1} \\ &M=1+(1-a+g)Y+(1-a)g \end{aligned}$$

である．

$if\ s_c=0, ag(s_p+T-B)=B$

これらを解くと，次のようになる．

$$\begin{aligned} &if\ s_c>0, B^*(T)=\frac{-Q(T)\pm\sqrt{Q^2(T)-4KL(T)}}{2K} \\ &\qquad s_c^*(B^*(T),T)=s_c^*(T)=a(1+a)^{-1}(w-T)-(1+a)^{-1}B^*(T) \\ &if\ s_c=0, B^*(T)=ag(1+ag)^{-1}(s_p+T) \\ &\qquad s_c^*=0 \end{aligned}$$

最後に次のような政府の社会的厚生関数最大化問題を解く.

$$
\begin{aligned}
&if\, s_c > 0,\\
&\underset{T}{Max} \ln(s_p + T - B^*(T)) + (g+b)\{\ln(w - T - s_c^*(B^*(T)) + a \ln r(s_c^*(B^*(T) + B^*(T))\}\\
&if\, s_c = 0,\\
&\underset{T}{Max} \ln(s_p + T - B^*(T)) + (g+b)\{\ln(w - T) + a \ln rB^*(T)\}
\end{aligned}
$$

$s_c > 0$ の場合，この問題を解くと最適所得移転 T^* が決定され，サブゲームパーフェクト均衡解は $(T^*, B^*(T^*), s_c^*(B^*(T^*), T^*))$ として導かれる.
$s_c = 0$ の場合，一階条件は次のようになる.

$$(1 - B^{*\prime}(T))(w-T)B^*(T) + (g+b)\{-B^*(T) + a(w-T)B^{*\prime}(T)\}(s_p + T - B^*(T)) = 0$$

したがってサブゲームパーフェクト均衡解が次のように求められる.

$$
\begin{aligned}
&T^* = \{1 + (g+b)(1+a)\}^{-1}\{w + (g+b)(aw - s_p)\}\\
&B^*(T^*) = ag(1+ag)^{-1}\left[s_p + \{1 + (g+b)(1+a)\}^{-1}\{w + (g+b)(aw - s_p)\}\right]\\
&s_c^* = 0
\end{aligned}
$$

Ⅲ　おわりに

本稿では政府がプレイヤーとしてゲームに参加し戦略的に所得移転を決定するモデルを導入し，サブゲーム均衡解を導出した．その際非負条件を追加して考察を行なうと，親と子との両者間でより後の手番をとる者がその解を0にするという結果を得た.

参考文献

(1)鎌田公良（2000)，『世代間所得移転政策と家族の行動』，勁草書房
(2)久保和華（2005)，「公的年金改革の問題点：遺産に関する一考察」，『宮崎公立大学人文学部紀要』13-1，75-84